

**Сборник с доклади от международна
научно-практическа конференция**

**ФУНДАМЕНТАЛНАТА
ПОДГОТОВКА
ВЪВ ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ - 2022**

**ФУНДАМЕНТАЛНАТА
ПОДГОТОВКА
ВЪВ ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ - 2024**

**ФУНДАМЕНТАЛНАТА
ПОДГОТОВКА
ВЪВ ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ**

**Сборник с доклади
от международна научно-практическа
конференция**



**ФУНДАМЕНТАЛНАТА ПОДГОТОВКА ВЪВ ВИСШЕТО
ОБРАЗОВАНИЕ**

**THE ROLE OF FUNDAMENTAL PROGRAMS IN HIGHER
EDUCATION**

Сборник с доклади от международна научно-практическа
конференция

Conference proceeding

**ФУНДАМЕНТАЛНАТА ПОДГОТОВКА ВЪВ ВИСШЕТО
ОБРАЗОВАНИЕ**

Сборник с доклади от
международна научно-практическа конференция,
организирана от катедра „Статистика и приложна математика“
при Икономически университет - Варна

21 октомври 2022 г.

**THE ROLE OF FUNDAMENTAL PROGRAMS IN HIGHER
EDUCATION**

International Scientific-Practical Conference
Organized by department “Statistics and Applied Mathematics”,
University of Economics - Varna

21 October 2022

2022

Издателство „Наука и икономика“
Икономически университет – Варна

Издаването на тази книга е по проект НПК-305/2022 г. и се финансира със средства от целева субсидия на държавния бюджет.

Публикуваните доклади не са редактирани и коригирани. Авторите носят пълна отговорност за тяхното съдържание и за грешки, допуснати по тяхна вина. Докладите са проверени за оригиналност.

Тази книга или нейните части не могат да бъдат възпроизвеждани или предавани под каквато и да е форма, или по какъвто и да е начин, електронен или механичен, и копирани без писменото разрешение на издателя.

The publication of this book is under Project № 305/2022 and is funded by a targeted subsidy to the state budget.

The published papers have not been edited and corrected. Authors are responsible for the content of their papers and errors committed by their fault. Papers are checked for originality.

This book or its parts may not be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, and copied without the written permission of the publisher.

ISSN 2815-3863

ОРГАНИЗАЦИОНЕН КОМИТЕТ

Председател:

Проф. д-р Росен Николаев – ръководител катедра
„Статистика и приложна математика”

Членове:

Проф. д-р Веселин Хаджиев
Доц. д-р Радан Мирянов
Доц. д-р Танка Милкова
Доц. д-р Дико Суружон
Доц. д-р Теодора Запрянова
Доц. д-р Маргарита Ламбова
Гл. ас. д-р Йордан Петков
Гл. ас. д-р Деян Михайлов
Гл. ас. д-р Велина Йорданова
Гл. ас. д-р Димитрия Карадимова
Гл. ас. д-р Светлана Тодорова
Гл. ас. д-р Любомир Любенов
Гл. ас. д-р Ваня Стоянова
Гл. ас. д-р Славей Желязкова
Тижен Талиб
Жулиета Михайлова
Кирилка Петрова

ORGANIZING COMMITTEE

Chair:

Prof. Rosen Nikolaev, PhD – head of department “Statistics and Applied Mathematics”

Members:

Prof. Veselin Hadzhiev, PhD
Assoc. Prof. Radan Miryanov, PhD
Assoc. Prof. Tanka Milkova, PhD
Assoc. Prof. Diko Suruzhon, PhD
Assoc. Prof. Teodora Zapryanova, PhD
Assoc. Prof. Margarita Lambova, PhD
Chief Assist. Prof. Yordan Petkov, PhD
Chief Assist. Prof. Deyan Mihaylov, PhD
Chief Assist. Prof. Velina Yordanova, PhD
Chief Assist. Prof. Dimitria Karadimova, PhD
Chief Assist. Prof. Svetlana Todorova, PhD
Chief Assist. Prof. Lyubomir Lyubenov, PhD
Chief Assist. Prof. Vanya Stoyanova, PhD
Chief Assist. Prof. Slaveya Zhelyazkova, PhD
Tizhen Talib
Julieta Mihaylova
Kirilka Petrova

НАУЧЕН СЪВЕТ

Председател:

Проф. д-р Росен Николаев

Членове:

Проф. д-р Веселин Хаджиев

Проф. д-р Владимир Сълов

Проф. д-р Юлиян Василев

Проф. д.н. Сава Гроздев

Проф. д-р Веселин Ненков

Доц. д-р Радан Мирянов

Доц. д-р Танка Милкова

Доц. д-р Маргарита Ламбова

Доц. д-р Теодора Запрянова

Доц. д-р Владимир Досев

Проф. д.п.н. Мария Шабанова - Москва, Русия

Проф. Алекса Малчески - Скопие, Р.С.М.

Prof. Sasa Popovic - University of Montenegro

Prof. dr. Ajda Fosner - University of Primorska, Slovenia

Prof. Vijay Tandon - Universal Business School, India

Prof. Samo Bobek - University of Maribor, Slovenia

Assoc. Prof. Aleksandra Tošović-Stevanović - Faculty of Business Economics and
Entrepreneurship in Belgrade, Serbia

Lect. Bulent Duman - Balikesir University, Turkey

ADVISORY COUNCIL:

Chair:

Prof. Rosen Nikolaev, PhD

Members:

Prof. Veselin Hadzhiev, PhD

Prof. Vladimir Sulov, PhD

Prof. Yulian Vasilev, PhD

Prof. Sava Grozdev, DSc.

Prof. Veselin Nenkov, PhD

Assoc. Prof. Radan Miryanov, PhD

Assoc. Prof. Tanka Milkova, PhD

Assoc. Prof. Margarita Lambova, PhD

Assoc. Prof. Teodora Zapryanova, PhD

Assoc. Prof. Vladimir Dosev, PhD

Prof. Maria Shabanova, D.Sc. - Moscow, Russia

Prof. Aleksa Malcheski – Skopje, Republic of North Macedonia

Prof. Sasa Popovic - University of Montenegro

Prof. dr. Ajda Fosner - University of Primorska, Slovenia

Prof. Vijay Tandon - Universal Business School, India

Prof. Samo Bobek - University of Maribor, Slovenia

Assoc. Prof. Aleksandra Tošović-Stevanović - Faculty of Business Economics and
Entrepreneurship in Belgrade, Serbia

Lect. Bulent Duman - Balikesir University, Turkey

СЪДЪРЖАНИЕ

1. Проф. д-р Росен Николаев (Икономически университет – Варна) НЯКОИ ОСОБЕНОСТИ ПРИ ИЗЧИСЛЯВАНЕ НА НЕТНА РАБОТНА ЗАПЛАТА	13
2. Prof. Sava Grozdev, D.Sc. (Plovdiv University “Paisii Hilendarski”), prof. Veselin Nenkov, PhD (Nikola Vaptsarov Naval Academy) DEVELOPMENT OF THE NUMBER NOTION FROM ALGEBRAIC EQUATION SOLVING POINT OF VIEW	21
3. Prof. Maria Shabanova, D.Sc. (Northern (Arctic) Federal University named after M.V.Lomonosov, Russia), associate professor Larisa Udovenko, PhD (Moscow Pedagogical State University, Russia) USING DYNAMIC GEOGEBRA VISUALIZATIONS IN THE STUDY OF THE DEPENDENCIES OF TWO VARIABLES IN A UNIVERSITY MATHEMATICS COURSE	26
4. Марат Габидуллин, Уляна Розанова, к. ф.-м. н. доц. Александр Луканкин (Московский региональный социально-экономический институт, Россия) ПОСТРОЕНИЕ НОРМАЛЬНОЙ КРИВОЙ ПО ЭМПИРИЧЕСКИМ ДАНЫМ ПРИ ПОМОЩИ ГРАФИЧЕСКОГО КАЛЬКУЛЯТОРА CASIO FX-CG20	36
5. Проф. д-р Росен Николаев, гл. ас. д-р Йордан Петков (Икономически университет – Варна) УЧАСТИЯ НА ИКОНОМИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА В НАЦИОНАЛНАТА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА (2016-2022 Г.)	46
6. Доц. д-р Татяна Маджарова (ВВМУ “Н. Й. Вапцаров”) ПРОБЛЕМИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА В ИНЖЕНЕРНИТЕ СПЕЦИАЛНОСТИ ВЪВ ВВМУ „Н. Й. ВАПЦАРОВ“	55

7. Доц. д-р Танка Милкова (Икономически университет – Варна) ЗНАЧЕНИЕ НА ФУНДАМЕНТАЛНАТА ПОДГОТОВКА ПО МАТЕМАТИКА ПРИ ИЗУЧАВАНЕ НА КОЛИЧЕСТВЕНИ МЕТОДИ В ЛОГИСТИКАТА	61
8. Доц. д-р Маргарита Ламбова (Икономически университет – Варна) СТАТИСТИЧЕСКОТО МИСЛЕНЕ – СРЕДСТВО ЗА ПО-ДОБРА ВИДИМОСТ В ИНФОРМАЦИОННАТА МЪГЛА	71
9. Доц. д-р Михал Стоянов (Икономически университет – Варна) ПРОГНОЗИРАНЕ НА ПРОДАЖБИТЕ НА ДРЕБНО НА ХРАНИ, НАПИТКИ И ТЮТЮНЕВИ ИЗДЕЛИЯ В РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ ЧРЕЗ ARIMA МОДЕЛ.....	77
10. Доц. д-р Светлозар Стефанов (Икономически университет – Варна) ТЕОРИЯТА НА СЧЕТОВОДСТВОТО КАТО ФУНДАМЕНТАЛНА УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА.....	85
11. Гл. ас. д-р Анна Лечева (Русенски университет, България) ИНТЕРАКТИВНА МУЛТИМЕДИЙНА ИНТЕРНЕТ СВЪРЗАНА ПРЕЗЕНТАЦИЯ ЗА ОБУЧЕНИЕ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ ПО ТЕМАТА АСИМПТОТИ	89
12. Гл. ас. д-р Деян Михайлов (Икономически университет – Варна) ИЗПОЛЗВАНЕ НА СИМУЛАЦИИ В СРЕДАТА НА MS EXCEL ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ОЦЕНКИТЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКОТО ОЧАКВАНЕ И ДИСПЕРСИЯТА	97
13. Гл. ас. д-р Деян Михайлов (Икономически университет – Варна) СРАВНЕНИЕ МЕЖДУ ВХОДНОТО НИВО ПО МАТЕМАТИКА НА СТУДЕНТИТЕ-ПЪРВОКУРСНИЦИ ОТ ИКОНОМИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА ПРЕЗ РАЗЛИЧНИ УЧЕБНИ ГОДИНИ	103

14. Гл. ас. д-р Деян Михайлов (Икономически университет – Варна) СРАВНЕНИЕ МЕЖДУ НЕЛИНЕЙНИЯ МЕТОД НА НАЙ-МАЛКИТЕ КВАДРАТИ И ЛИНЕАРИЗАЦИЯТА НА ДРОБНО-ЛИНЕЕН РЕГРЕСИОНЕН МОДЕЛ.....	107
15. Гл. ас. д-р Велина Йорданова (Икономически университет – Варна) ВЗАИМОДЕЙСТВИЕТО НА МАТЕМАТИКАТА С ИКОНОМИКАТА	114
16. Гл. ас. д-р Ваня Стоянова (Икономически университет – Варна) РОЛЯТА НА ФУНДАМЕНТАЛНИТЕ ДИСЦИПЛИНИ ЗА КАЧЕСТВОТО НА ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ.....	118
17. Гл. ас. д-р Славея Желязкова (Икономически университет – Варна) МЯСТОТО НА СТАТИСТИКАТА И ИКОНОМЕТРИЯТА В ОБУЧЕНИЕТО НА ИКОНОМИСТИТЕ В ТОП УНИВЕРСИТЕТИ В СВЕТА	123
18. Гл. ас. д-р Светлана Тодорова, гл. ас. д-р Димитрия Карадимова (Икономически университет – Варна) MS EXCEL КАТО ПОМОЩНО СРЕДСТВО ПРИ ПРЕПОДАВАНЕТО НА СТАТИСТИЧЕСКИ ХИПОТЕЗИ	136
19. Гл. ас. д-р Силвия Господинова, гл. ас. д-р Димитрия Карадимова (Икономически университет – Варна) СТАТИСТИЧЕСКИ АНАЛИЗ НА ПРОИЗВОДИТЕЛНОСТТА НА ТРУДА В БЪЛГАРИЯ	146
20. Гл. ас. д-р Силвия Господинова (Икономически университет – Варна) СТРУКТУРНА КОНВЕРГЕНЦИЯ И ИКОНОМИЧЕСКО РАЗВИТИЕ – ТЕОРЕТИЧЕН ПРЕГЛЕД	157

21. Гл. ас. д-р Мария Армянова (Икономически университет – Варна)	
ПОДОБРЯВАНЕ НА УМЕНИЯТА НА РАЗРАБОТЧИЦИТЕ	
ЧРЕЗ ИЗПОЛЗВАНЕ НА ПОДХОДЯЩИТЕ ШАБЛОНИ	
ЗА ПРОЕКТИРАНЕ	164
22. Д-р Константин Капитанов (Икономически университет – Варна)	
ОЦЕНКА НА ВЛИЯНИЕТО НА ПРЕКИТЕ ЧУЖДЕСТРАННИ	
ИНВЕСТИЦИИ ВЪРХУ ИНВЕСТИЦИОННИЯ ПРОЦЕС НА	
СТРАНИТЕ КАНДИДАТИ ЗА ЧЛЕНСТВО В ЕС	173
23. Докт. Жулиета Михайлова (Икономически университет – Варна)	
ИЗПОЛЗВАНЕ НА ЛИНЕЕН ОПТИМИЗАЦИОНЕН МОДЕЛ	
ЗА ПЛАНИРАНЕ НА ДОСТАВКИ ПО МАРШРУТИ	181
24. Докт. Жулиета Михайлова (Икономически университет – Варна)	
ПРИЛАГАНЕ НА ТЕОРИЯТА НА БОКС И ДЖЕНКИНС ЗА	
ОЦЕНКА НА ДИНАМИКАТА НА ПРОДАЖБИТЕ НА ЕДРО	
В МАЛКА ДИСТРИБУТОРСКА ФИРМА	187
25. Катя Чалькова (ПМГ „Иван Вазов“ - Димитровград), Донка Вълева (ОУ „Алеко Константинов“ - Димитровград)	
ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕНИЯ ПОДХОД В ОБУЧЕНИЕТО	
ПО МАТЕМАТИКА	193
26. Мария Митрева (ЕГ „Христо Ботев“ - Кърджали)	
ГЕОМЕТРИЧНА ВЕРОЯТНОСТ	198

CONTENT

1. Prof. Rosen Nikolaev, PhD (University of Economics – Varna)	
CERTAIN FEATURES IN THE CALCULATION OF NET WAGES	13
2. Prof. Sava Grozdev, D.Sc. (Plovdiv University “Paisii Hilendarski”), Prof. Veselin Nenkov, PhD (Nikola Vaptsarov Naval Academy)	
DEVELOPMENT OF THE NUMBER NOTION FROM ALGEBRAIC EQUATION SOLVING POINT OF VIEW	21
3. Prof. Maria Shabanova, D.Sc. (Northern (Arctic) Federal University named after M.V.Lomonosov, Russia), Associate professor Larisa Udovenko, PhD (Moscow Pedagogical State University, Russia)	
USING DYNAMIC GEOGEBRA VISUALIZATIONS IN THE STUDY OF THE DEPENDENCIES OF TWO VARIABLES IN A UNIVERSITY MATHEMATICS COURSE	26
4. Marat Gabidullin, Ulyana Rozanova, Alexander Lukankin, PhD (Moscow Regional Social and Economic Institute, Russia)	
CONSTRUCTION OF A NORMAL CURVE BASED ON EMPIRICAL DATA USING THE CASIO FX-CG20 GRAPHING CALCULATOR	36
5. Prof. Rosen Nikolaev, PhD, Chief Assist. Prof. Yordan Petkov, PhD (University of Economics – Varna)	
PARTICIPATION OF THE UNIVERSITY OF ECONOMICS – VARNA IN THE NATIONAL MATHEMATICS OLYMPIAD FOR UNIVERSITY STUDENTS (2016-2022)	46
6. Assoc. Prof. Tatyana Madzharova, PhD (Nikola Vaptsarov Naval Academy)	
PROBLEMS IN TEACHING OF MATHEMATICS IN ENGINEERING SPECIALITIES AT NIKOLA VAPTSAROV NAVAL ACADEMY	55
7. Assoc. Prof. Tanka Milkova, PhD (University of Economics – Varna)	
IMPORTANCE OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS TRAINING WHEN STUDYING QUANTITATIVE METHODS IN LOGISTICS	61

8. Assoc. Prof. Margarita Lambova, PhD (University of Economics – Varna)	
STATISTICAL THINKING – A TOOL FOR BETTER	
VISIBILITY IN THE INFORMATION FOG	71
9. Assoc. Prof. Michal Stojanov, PhD (University of Economics – Varna)	
FORECASTING RETAIL SALES OF FOOD, BEVERAGES AND	
TOBACCO PRODUCTS IN THE REPUBLIC OF BULGARIA	
USING AN ARIMA MODEL	77
10. Assoc. Prof. Svetlozar Stefanov, PhD (University of Economics - Varna)	
THE THEORY OF ACCOUNTING AS A FUNDAMENTAL	
LEARNING DISCIPLINE,.....	85
11. Chief Assist. Prof. Anna Lecheva, PhD (University of Ruse)	
INTERACTIVE MULTIMEDIA WEB-LINKED PRESENTATION	
FOR MATHEMATICAL ANALYSIS TRAINING	
ON THE TOPIC OF ASYMPTOTES	89
12. Chief Assist. Prof. Deyan Mihaylov, PhD (University of Economics-Varna)	
USING SIMULATIONS IN EXCEL TO EVALUATE THE	
ESTIMATORS OF THE EXPECTATION AND THE VARIANCE	97
13. Chief Assist. Prof. Deyan Mihaylov, PhD (University of Economics-Varna)	
A COMPARISON BETWEEN ENTRY LEVEL TEST IN	
MATHEMATICS OF THE FIRST-YEAR STUDENTS IN	
UNIVERSITY OF ECONOMICS-VARNA DURING DIFFERENT	
ACADEMIC YEARS	103
14. Chief Assist. Prof. Deyan Mihaylov, PhD (University of Economics-Varna)	
COMPARISON BETWEEN NONLINEAR LEAST SQUARE METHOD	

AND LINEARIZATIONS OF SATURATION GROWTH MODEL	107
15. Chief Assist. Prof. Velina Yordanova, PhD (University of Economics - Varna)	
THE INTERACTION OF MATHEMATICS WITH ECONOMICS	114
16. Chief Assist. Prof. Vanya Stoyanova, PhD (University of Economics – Varna)	
THE ROLE OF FUNDAMENTAL DISCIPLINES FOR THE QUALITY OF HIGHER EDUCATION	118
17. Chief Assist. Prof. Slaveya Zhelyazkova, PhD (University of Economics – Varna)	
THE PLACE OF STATISTICS AND ECONOMETRICS IN THE ECONOMIC EDUCATION IN THE WORLD'S TOP UNIVERSITIES	123
18. Chief Assist. Prof. Svetlana Todorova, PhD, Chief Assist. Prof. Dimitria Karadimova, PhD (University of Economics – Varna)	
MS EXCEL AS A TOOL FOR TEACHING HYPOTHESIS TESTING IN STATISTICS	136
19. Chief Assist. Prof. Silvia Gospodinova, PhD, Chief Assist. Prof. Dimitria Karadimova, PhD (University of Economics – Varna)	
STATISTICAL ANALYSIS OF LABOR PRODUCTIVITY IN THE BULGARIAN ECONOMY	146
20. Chief Assist. Prof. Silvia Gospodinova (University of Economics – Varna)	
STRUCTURAL CONVERGENCE AND ECONOMIC DEVELOPMENT - THEORETICAL OVERVIEW	157
21. Chief Assist. Prof. Mariya Armanova, PhD (University of Economics – Varna)	
IMPROVING DEVELOPER SKILLS BY USING THE APPROPRIATE DESIGN PATTERNS	164

22. Konstantin Kapitanov, PhD (University of Economics – Varna)	
ASSESSMENT OF FOREIGN DIRECT INVESTMENTS	
IMPACT OF THE INVESTMENT PROCESS OF EU	
CANDIDATE COUNTRIES	173
23. PhD Student Julieta Mihaylova (University of Economics - Varna)	
PLANNING OF DELIVERY ROUTES USING THE LINEAR	
PROGRAMMING MODEL	181
24. PhD Student Julieta Mihaylova (University of Economics - Varna)	
USING THE BOX - JENKINS METHOD TO ASSESS THE	
DYNAMICS OF WHOLESALERS IN A SMALL	
DISTRIBUTION COMPANY	187
25. Katya Chalakova (PMG „Ivan Vazov“ - Dimitrovgrad),	
Donka Valeva (OU „Aleko Konstantinov“ - Dimitrovgrad)	
THE THEORETICAL-MULTIPLE APPROACH IN MATHEMATICS	
EDUCATION	193
26. Maria Mitreva ("Hristo Botev" Language High School - Kardjali)	
GEOMETRIC PROBABILITY	198

CERTAIN FEATURES IN THE CALCULATION OF NET WAGES

Prof. Rosen Nikolaev, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *The report analyses the formation of wages in the Republic of Bulgaria on the basis of the current legislation. Four other options are considered for possible calculation of social security and income tax and on this basis and on the net wage. Analysis, comparison, summary, conclusions and recommendations in this regard have been made. All theoretically justified productions are illustrated by a specific example. Emphasis is placed on the need for deep knowledge of the mathematical apparatus in order to gain a skill for real understanding and application of these different approaches.*

Keywords: *Net wages; Income tax; Social security contributions.*

JEL code: C02

НЯКОИ ОСОБЕНОСТИ ПРИ ИЗЧИСЛЯВАНЕ НА НЕТНА РАБОТНА ЗАПЛАТА

Проф. д-р Росен Николаев
Икономически университет – Варна, България

Фундаменталната подготовка по математика е от съществено значение при изучаване на много от останалите фундаментални и специални дисциплини в различни специалности в обхвата на областта на висше образование Социални, стопански и правни науки, в частност в професионално направление Икономика. Считаме, че задълбочените познания по математика са от съществено значение за придобиване на знания и умения за осъществяване на редица дейности и процеси в икономиката. Използването на готови решения и формули в икономиката, без разбиране и без реално осъзнаване на същността и значението на използвания математически апарат в много случаи може да доведе до грешни изводи, некоректни тълкувания и умишлено или поради незнание, заблуждение на редица заинтересовани страни. За съжаление през последните години все по-често се наблюдава този процес на напълно грешно или не напълно коректно използване на дори елементарни понятия като процент и процентни изчисления от страна на управляващи, анализатори и журналисти. Това, случайно или умишлено, води до заблуждения в обществото, тъй като голяма част от това общество също не борави с математическия апарат на необходимото високо ниво.

Има много различни примери за това как липсата на добри познания по математика води до разпространяване на некоректни изводи и резултати в обществения, социален и политически живот на България.

Целта на автора в настоящия доклад е да представи някои математически зависимости, свързани с изчисляване на нетна работна заплата, както и различни възможности за нейното формиране, като очертае някои съществуващи

некоректно използвани формулировки по отношение на прилаганата в момента политика и представи и други възможни методи за формиране на нетна работна заплата.

Тук ще направим уточнение, че не коментираме приетите закони и правила за формиране на работна заплата, а само някои неточности при формулиране на реално прилагания подход, които водят до волно или неволно заблуждение по отношение на процентите на удържаните осигуровки и данъци.

Може би са малко работещите хора, които знаят как се формира трудовото им възнаграждение. Известно е, че от brutната заплата се удържат осигуровките и данък общ доход, но малцина са запознати как точно се осъществяват тези изчисления.

Като начало ще въведем някои означения.

Z_g - брутна заплата (в лв.);

Z_n - нетна заплата (в лв.);

p_0 - процент на осигуровките (в %);

p_d - процент на ДОД (данък общ доход) (в %);

O_s - осигуровки (в лв.);

D - данък общ доход (в лв.).

1. Според сега съществуващото законодателство в Република България от brutното възнаграждение първо се отчисляват осигуровките:

$$O_s = \frac{p_0}{100} Z_g$$

(1)

и това което остава за облагане с ДОД

$$Z_g - O_s = Z_g - \frac{p_0}{100} Z_g = Z_g \left(1 - \frac{p_0}{100} \right).$$

На този остатък ДОД е:

$$D = \frac{p_d}{100} Z_g \left(1 - \frac{p_0}{100} \right) \quad (1')$$

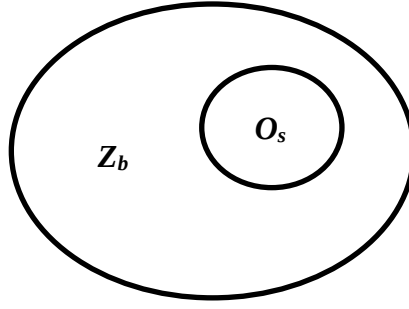
и за чистото трудово възнаграждение остава:

$$Z_n = Z_g \left(1 - \frac{p_0}{100} \right) - \frac{p_d}{100} Z_g \left(1 - \frac{p_0}{100} \right)$$

или

$$Z_n = Z_g \left(1 - \frac{p_0}{100} \right) \left(1 - \frac{p_d}{100} \right). \quad (1'')$$

Първото интересно, което прави впечатление е, че в момента в който се удържат осигуровките, самите те са включени вътре в brutното възнаграждение (фиг. 1) и на практика се удържат осигуровки и от осигуровките.



Фигура 1.

2. Нека се опитаме да намерим размера на O_s , но без в тях да се включват и осигуровките върху O_s , т.е.

$$O_s = \frac{p_0}{100}(Z_\epsilon - O_s) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{p_0}{100}\right)O_s = \frac{p_0}{100}Z_\epsilon$$

или

$$O_s = \frac{p_0 Z_\epsilon}{100 + p_0}$$

(2)

и тогава остатъкът за облагане с данък е

$$Z_\epsilon - O_s = Z_\epsilon - \frac{p_0 Z_\epsilon}{100 + p_0} \quad \text{или} \quad \frac{100 Z_\epsilon}{100 + p_0}$$

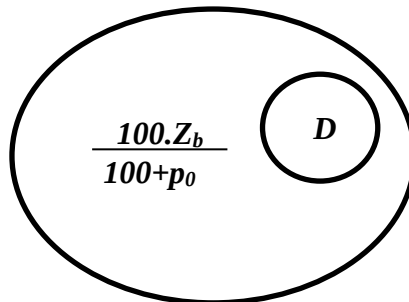
ДОД върху това е

$$D = p_d \cdot \frac{Z_\epsilon}{100 + p_0} \quad (2')$$

и за чистото възнаграждение се получава $Z_n = \frac{100 Z_\epsilon}{100 + p_0} - p_d \cdot \frac{Z_\epsilon}{100 + p_0}$ или

$$Z_n = \frac{Z_\epsilon(100 - p_d)}{100 + p_0} \quad (2'').$$

Ако внимателно погледнем в този случай, в момента на удържане на данъка, той самият е включен в сумата за облагане (фиг. 2).



Фигура 2.

3. Нормално е да няма данък върху самия данък, т.е.

$$D = \frac{p_d}{100} \left(\frac{100 Z_\epsilon}{100 + p_0} - D \right) \quad \text{или} \quad \left(1 + \frac{p_d}{100} \right) D = p_d \cdot \frac{Z_\epsilon}{100 + p_0} \Leftrightarrow$$

$$D = \frac{100 p_d Z_\epsilon}{(100 + p_0)(100 + p_d)}. \quad (3)$$

Осигуровките са същите като в т. 2, т.е.

$$O_s = \frac{p_0 Z_g}{100 + p_0}. \quad (3')$$

За чистото възнаграждение получаваме

$$Z_n = \frac{100^2 Z_g}{(100 + p_0)(100 + p_d)}. \quad (3'')$$

Това е формулата за чистото трудово възнаграждение, ако няма данък върху данъка и осигуровки върху осигуровките.

Нека се върнем към стандартния начин за пресмятане на нетното трудово възнаграждение в Република България. При удържането на осигуровките, то такива се начисляват и върху данъка. Това например е основание държавните служители да не плащат осигуровки, тъй като данъкоплатците вече са им ги платили.

4. Ще разгледаме варианта без осигуровки върху данъка и без данък върху осигуровките. Трябва да решим следната система от две уравнения с две неизвестни:

$$\begin{cases} D = \frac{p_d}{100}(Z_g - O_s) \\ O_s = \frac{p_0}{100}(Z_g - D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100D + p_d O_s = p_d Z_g \\ p_0 D + 100O_s = p_0 Z_g \end{cases}.$$

След решаване на тази проста система за неизвестните D и O_s получаваме съответно:

$$D = \frac{Z_g(100 - p_0)p_d}{100^2 - p_0 p_d} \quad (4)$$

$$O_s = \frac{Z_g(100 - p_d)p_0}{100^2 - p_0 p_d} \quad (4')$$

и за нетното възнаграждение получаваме:

$$Z_n = \frac{Z_g [100^2 + p_0 p_d - 100(p_0 + p_d)]}{100^2 - p_0 p_d}. \quad (4'')$$

Изхождайки от това, че все пак в този вариант има данък върху данъка и осигуровки върху осигуровките може да заключим, че и този вариант не е удовлетворителен. Положителното тук е, че няма осигуровки върху данъка и това е вариант, при който държавните служители би трябвало сами да си плащат осигуровките.

Сега ще предложим вариант, който считаме за оптимален и най-справедлив.

5. Без данък върху данъка и осигуровките и без осигуровки върху данъка и осигуровките.

Трябва да решим следната система:

$$\begin{cases} O_s = \frac{p_0}{100}(Z_g - O_s - D) \\ D = \frac{p_d}{100}(Z_g - O_s - D) \end{cases}.$$

От тук лесно се забелязва зависимостта между данъка и осигуровките, а именно:

$$\frac{O_s}{D} = \frac{p_0}{p_d}. \quad (5)$$

След решаване на системата получаваме:

$$D = \frac{p_d Z_s}{100 + p_0 + p_d} \quad (6)$$

$$O_s = \frac{p_0 Z_s}{100 + p_0 + p_d} \quad (6')$$

и нетното трудово възнаграждение е:

$$Z_n = \frac{100 Z_s}{100 + p_0 + p_d}. \quad (6'')$$

С цел онагледяване на теоретично изведените резултати, ще разгледаме конкретен пример.

Нека брутната заплата е в размер на 2000 лв. Според действащото законодателство в България общият процент на осигуровките е 13,78%, а ДОД е 10%. Ще разгледаме какво се получава при всеки от разгледаните варианти.

В случая: $Z_s = 2000$; $p_0 = 13,78$; $p_d = 10$.

1. Според сега действащото законодателство:

От формула (1):

$$O_s = 0,1378 \cdot 2000 = 275,60 \text{ лв.}$$

От формула (1'):

$$D = 0,1 \cdot 2000 (1 - 0,1378) = 172,44 \text{ лв.}$$

и от формула (1''):

$$Z_n = 2000 \cdot 0,908622 = 1551,96 \text{ лв.}$$

2. Без осигуровки върху осигуровките:

От формула (2):

$$O_s = \frac{13,78 \cdot 2000}{113,78} = 242,22 \text{ лв.}$$

От формула (2'):

$$D = \frac{10 \cdot 2000}{113,78} = 175,78 \text{ лв.}$$

и от формула (2''):

$$Z_n = \frac{2000 \cdot 90}{113,78} = 1582 \text{ лв.}$$

3. Без данък върху данъка и осигуровки върху осигуровките.

От формула (3):

$$D = \frac{100 \cdot 10 \cdot 2000}{110 \cdot 113,78} = 159,80 \text{ лв.}$$

От формула (3') ((2)):

$$O_s = \frac{13,78 \cdot 2000}{113,78} = 242,22 \text{ лв.}$$

От формула (3''):

$$Z_n = \frac{100^2 \cdot 2000}{110 \cdot 113,78} = 1597,98 \text{ лв.}$$

4. Без осигуровки върху данъка и без данък върху осигуровките.

От формула (4):

$$D = \frac{2000.86,22.10}{100^2 - 10.13,78} = 174,85 \text{ лв.}$$

От формула (4'):

$$O_s = \frac{2000.90.13,78}{100^2 - 10.13,78} = 251,51 \text{ лв.}$$

и от формула (4''):

$$Z_n = \frac{2000(100^2 + 10.13,78 - 100.23,78)}{100^2 - 10.13,78} = 1573,64 \text{ лв.}$$

5. Без данък върху данъка и осигуровките и без осигуровки върху данъка и осигуровките.

От формула (6):

$$D = \frac{10.2000}{123,78} = 161,58 \text{ лв.}$$

От формула (6'):

$$O_s = \frac{13,78.2000}{123,78} = 222,65 \text{ лв.}$$

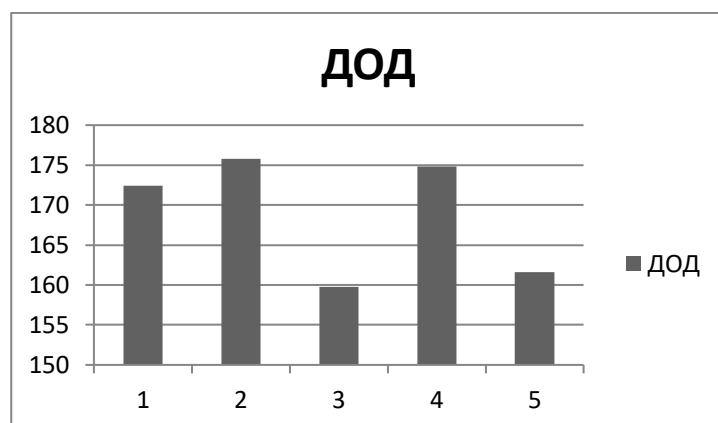
и от формула (6''):

$$Z_n = \frac{100.2000}{123,78} = 1615,77 \text{ лв.}$$

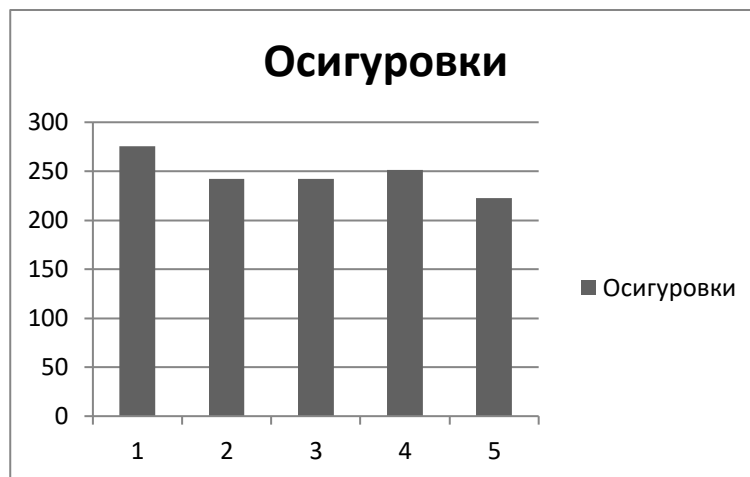
Нека оформим резултатите от петте варианта в една таблица (табл. 1).

Таблица 1

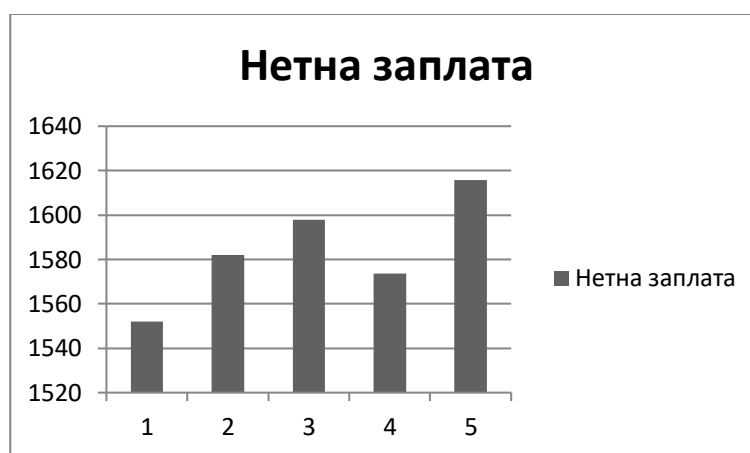
Вариант	ДОД (D)	Осигуровки (O _s)	Нетна заплата (Z _n)
1	172,44	275,60	1551,96
2	175,78	242,22	1582,00
3	159,80	242,22	1597,98
4	174,85	251,51	1573,64
5	161,58	222,65	1615,77



Фигура 3. ДОД.



Фигура 4. Осигуровки.



Фигура 5. Нетна заплата.

Това, което прави впечатление е, че най-лошият вариант за работниците е този, който е действащият реално в момента.

Друго характерно е, че в четвъртия вариант чистата сума също е малка, а данъкът е значително голям. Това е нормално, защото след като няма осигуровки върху данъка, то те са по-малки и като се приспадат, сумата без тях, която се облага е по-висока, отколкото при първия вариант.

Един приемлив вариант е втория, когато няма данък върху данъка и осигуровки върху осигуровките, но данъкът в този случай е най-висок, а голямата сума за получаване се дължи на малката стойност на осигуровките.

Както вече беше споменато, най-справедливият вариант по наше мнение е последният. Нормално е суми, които се удържат по различни причини, да няма удържки върху самите тях.

Както се вижда разликата между сега съществуващия вариант и справедливия, по наше мнение, в сумата за получаване при 2000 лв. брутна заплата е $1615,77 - 1551,96 = 63,81$ лв.

През първото тримесечие на 2022 г. средната брутна заплата е 1593 лв. и наетите лица по трудово и служебно правоотношение е 2,27 милиона по данни на НСИ.

При първия вариант $Z_n = 1593 \left(1 - \frac{13,78}{100}\right) \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 1236,14$ лв., а при петия $Z_n = \frac{100 \cdot 1593}{123,78} = 1286,96$ лв. и разликата е 50,82 лв. и за 2,27 млн.: $2,27 \cdot 50,82 = 115361400$ лв. ощетяване на месец на работещото население в България или 1384336800 лв. на година само заради сега съществуващия начин за изчисляване на работната заплата.

Нека в таблица обобщим и изведените формули за петте варианта (табл. 2).

Таблица 2

Вариант	D	O_s	Z_n
1	$\frac{p_d}{100} Z_\epsilon \left(1 - \frac{p_0}{100}\right)$	$\frac{p_0}{100} Z_\epsilon$	$Z_\epsilon \left(1 - \frac{p_0}{100}\right) - \frac{p_d}{100} Z_\epsilon \left(1 - \frac{p_0}{100}\right)$
2	$\frac{p_d Z_\epsilon}{100 + p_0}$	$\frac{p_0 Z_\epsilon}{100 + p_0}$	$\frac{Z_\epsilon (100 - p_d)}{100 + p_0}$
3	$\frac{100 p_d Z_\epsilon}{(100 + p_0)(100 + p_d)}$	$\frac{p_0 Z_\epsilon}{100 + p_0}$	$\frac{100^2 Z_\epsilon}{(100 + p_0)(100 + p_d)}$
4	$\frac{Z_\epsilon (100 - p_0) p_d}{100^2 - p_0 p_d}$	$\frac{Z_\epsilon (100 - p_d) p_0}{100^2 - p_0 p_d}$	$\frac{Z_\epsilon [100^2 + p_0 p_d - 100(p_0 + p_d)]}{100^2 - p_0 p_d}$
5	$\frac{p_d Z_\epsilon}{100 + p_0 + p_d}$	$\frac{p_0 Z_\epsilon}{100 + p_0 + p_d}$	$\frac{100 Z_\epsilon}{100 + p_0 + p_d}$

Предложените в доклада анализи и различни подходи за изчисляване на осигуровки и данък върху общия доход, оттам и формиране на трудово възнаграждение, могат да бъдат осмислени и интегрирани в практиката само от икономисти с високи познания и умения да прилагат математическия апарат.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Nikolaev, R., Suruzhon, D., Stoyanov, T., Zapryanova, T., Milkova, T., Miryanov, R. (2021). *Prilozhna matematika*. Varna: Nauka i ikonomika.
2. Закон за данъците върху доходите на физическите лица (<https://lex.bg/laws/ldoc/2135538631>)
3. Kodeks za sotsialno osiguryavane (<https://lex.bg/laws/ldoc/1597824512>)
4. Naredba za elementite na vaznagrazhdenieto i za dohodite, varhu koito se pravayat osiguritelni vnoski (<https://www.lex.bg/laws/ldoc/-549450240>)
5. Naredba za strukturata i organizatsiyata na rabotnata zaplata (<https://www.lex.bg/laws/ldoc/2135542406>)
6. <https://nsi.bg/bg>

DEVELOPMENT OF THE NUMBER NOTION FROM ALGEBRAIC EQUATION SOLVING POINT OF VIEW

Prof. Sava Grozdev, D.Sc.

Plovdiv University "Paisii Hilendarski", Bulgaria

Prof. Veselin Nenkov, PhD

Nikola Vaptsarov Naval Academy, Bulgaria

Abstract: *An approach is described to justify basic number sets by means of simple algebraic equations of first, second and third order. The main goal is to justify the introduction of complex number notion.*

Keywords: *Number; Equation*

JEL code: *C0*

Introduction. Numbers are essential in all basic human activities. Parallely, the information in the form of number data is processed by various manipulations. The corresponding results lead to different scientific directions which are parts of higher education. Mathematics is included in it and studies basic chapters which are connected with the number notion and are applied in many professional domains that are taught to students (Prodanov, I. & I. Chobanov, 1976). Some of the mathematical applications concern differential equations solving (Manolov, Deneva, Genov & Shopolov, 1977). At the same time they are connected with the use of the number notion (Balk, Balk & Poluhin, 1988; Genov, Mihovski & Mollov, 1991; Markushevich & Markushevich, 1980; Nancheva & Stoyanov, 1977). For this reason it is suitable to develop a short retrospection of the number notion development and basic number sets before studying complex numbers. Since a lot of naturally generated problems are solved by means of equations, the present paper proposes an approach to the motivation of number notion development and creation of basic number sets by complex algebraic equations solving of first, second and third order.

Basic number sets and solving equations in them. The necessity of counting various objects in the surrounding environment has led to creating the *set of the natural numbers*

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \dots\}.$$

The basic actions with natural numbers include addition, subtraction, multiplication, division, comparison. Different problems could be solved in the set under consideration reducible to equation compositions. An example is the following problem.

Problem 1. A farmer breeds two goats and several sheep. How many sheep breeds the farmer if the total number of sheep and goats is 7?

If the number of the sheep is x , then it follows from the condition, that $x + 2 = 7$. Consequently $x = 7 - 2 = 5$, i.e. the sheep are 5.

Another problem which is reducible to the composition of an equation with the participation of natural numbers is the following one

Problem 2. The temperature at one o'clock pm in a December day was 6°C . What was the temperature at 8 o'clock am if it raised by 10°C during the next 5 hours?

If the temperature at 8 o'clock am was $x^{\circ}\text{C}$, it follows from the condition that $x+10=6$. Consequently $x=6-10$. It is impossible to execute this action in the set of the natural numbers N . That is why it is necessary to enlarge the set in such a way that the equation in question could be solved. The enlargement is the *set of the integers*

$$Z = \{\dots, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}.$$

In the set of the integers Z more equations could be solved. A problem with the participation of the basic action multiplication is the following one

Problem 3. The girls in a student group are twice as many as the boys. If all students in the group are 33, find the number of the boys.

If the boys are x , then the girls are $2x$. It follows from the condition that $x+2x=33$, i.e. $3x=33$. Consequently $x=\frac{33}{3}=11$. The solution is not leaving the set of the integers. Something more, it is from its subset N .

Another problem of a similar kind is the following one

Problem 4. Two breads are available to four people. How should the breads be distributed that everybody could receive one and the same quantity?

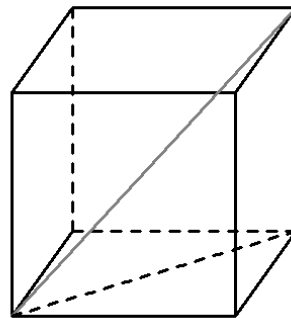
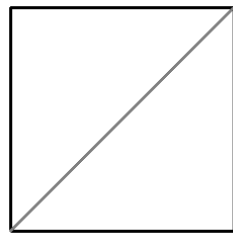
Let everybody receive a quantity equal to x . The condition is satisfied if $4x=2$. Consequently $x=2:4=\frac{2}{4}$. The result is not a number from Z , because the action $2:4$ is not possible in the set of the integers. This imposes an enlargement of the set of the integers in such way that the equation under consideration becomes solvable. Thus, we come to the *set of the rational numbers*

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in Z, b \neq 0 \right\}.$$

We will consider the next three problems

Problem 5. If a sheet metal has the form of a square with side length 1 m , find the diagonal length of the square sheet.

If x is the diagonal length of the square, it follows from the Pythagorean theorem that $x^2=1^2+1^2$, i.e. the problem is reduced to the equation $x^2=2$.



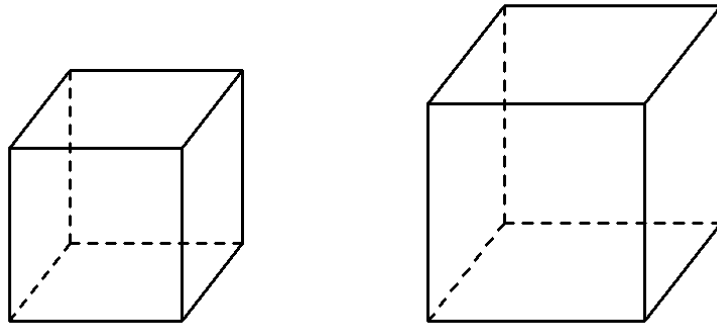
Problem 6. If the side length of a cube is 1 m , find the body diagonal length of the cube.

If x is the diagonal length of the cube, we have from the Pythagorean theorem that $x^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2$, i.e. the problem is reduced to the equation $x^2 = 3$.

A legend says that during an epidemic in the island of Delos an oracle has given an advice for stopping the epidemic to enlarge the cubic sacrifice twice without changing its form, i.e. to solve the next problem

Problem 7. (Cube duplication problem) By means of a ruler and compass find the edge of a cube with volume twice as large as the volume of a given cube (Genov, Mihovski & Mollov, 1991).

If the edge length of the given cube is 1, while the edge length of the second cube is x , then it follows from the condition that $x^3 = 2$.



The above three equations have no solution in the set of the rational numbers. Suppose that the equation $x^2 = 2$ has a solution x , which could be represented in the form $x = \frac{p}{q}$ with integers p and q whose common divisor is not greater than 1.

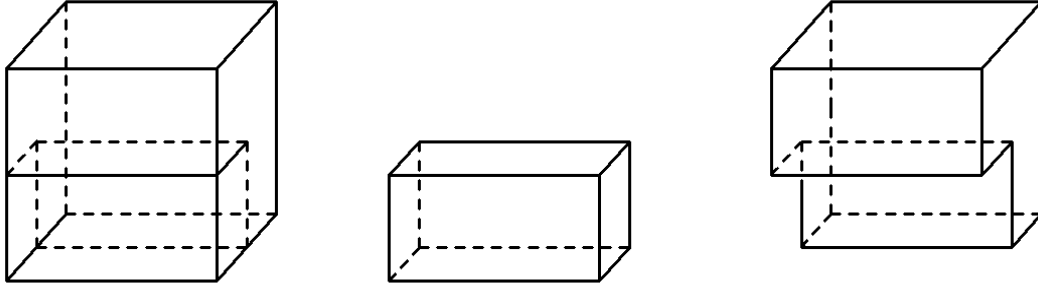
Consequently $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, i.e. $p^2 = 2q^2$. The last equality implies that p^2 is even and we conclude that p is even too. Thus, $p = 2p_1$ for $p_1 \in \mathbb{Z}$. After substituting we obtain that $q^2 = 2p_1^2$ and from here in the same way we conclude that $q = 2q_1$, where $q_1 \in \mathbb{Z}$. We find that the integers p and q have a common divisor 2, which is contradicts the assumption that x is rational.

In a similar way it follows that the equations $x^2 = 3$ and $x^3 = 2$ have no solution in the set of the rational numbers. Therefore, there are numbers which are not ratios of two integers. Such numbers are called *irrational numbers*. Thus, the solutions of the three equations under consideration are irrational numbers. Unifying the set of the rational numbers and the set of the irrational numbers we obtain the *set of the real numbers*. The actions addition, subtraction, multiplication, division and their properties move from the set of the rational numbers to the set of the real numbers.

It is well-known that not all equations of second order are solvable in the set of the real numbers. The main problem is connected with the square root of a negative number. A necessity appears of enlarging the set of the real numbers in order to solve the mentioned equations. On the other hand it is the necessity of having a possibility to solve equations of such a kind. The next problem suggests an answer.

Problem 8. A cube is divided into two parts P and Q . The solid P is a rectangular parallelepiped with one side being a square and the third edge being equal to the cube edge. Find the edge length of the cube if the volume of the parallelepiped P is three times less than the volume of the solid Q .

Let the cube edge be x . Then the volumes of the cube and P are x^3 and $x \cdot 1 \cdot 1 = x$, respectively. It follows from the condition that the volume of Q is $3x$. Consequently, $x^3 = x + 3x$ and from here we obtain the equation $x^3 - 4x = 0$.



The last equation is of the kind $x^3 + px + q = 0$. It is known for it ((Balk, Balk & Poluhin, 1988; Genov, Mihovski & Mollov, 1991)), that the solution is given by the following Cardano formula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}.$$

In the case under consideration we have $p = -4$ and $q = 0$. Consequently $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -\frac{64}{27} < 0$ and it is not possible to find the value of $\sqrt{-\frac{64}{27}}$ in the set of the real numbers. On the other hand, the obtained equation could be written in the form $x(x+2)(x-2) = 0$. The last has three (integer) roots $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ and $x_3 = 2$. Only the solution $x_3 = 2$ has a geometric sense which means that the cube edge is equal to 2. The result shows that if we want to obtain the real solutions of the equation $x^3 - 4x = 0$ using Cardano formula, the expression $\sqrt{-\frac{8}{27}}$ should be meaningful and should lead to the solutions. Thus, a square root of a negative number is meaningful in third order equations solving. It is meaningful in second order equations too. The problem could be solved by enlarging the set of the real numbers, thus obtaining the *set of the complex numbers* C .

What follows after the short justification of the necessity to introduce complex numbers is the construction of the set of the complex numbers and executing the main actions with them (Balk, Balk & Poluhin, 1988; Genov, Mihovski & Mollov, 1991; Markushevich & Markushevich, 1980; Nancheva & Stoyanov, 1977; Prodanov, I. & I. Chobanov, 1976).

LITERATURE

1. Balk, M., G. Balk & A. Poluhin (1988). *Real applications of imaginary numbers*. Kiev: Radyanskaia shkola. (in Russian)
2. Genov, G., S. Mihovski & T. Mollov (1991). *Algebra with Number theory*. Sofia: Nauka i Izkustvo. (in Bulgarian)
3. Markushevich, A. & L. Markushevich (1980). Introduction to the theory of analytic functions. Sofia: Nauka i Izkustvo. (in Bulgarian)
4. Manolov, S., A. Deneva, A. Genov & N. Shopolov (1977). *Mathematics. Part 3*. Sofia: Technika. (in Bulgarian)
5. Nancheva, V. & N. Stoyanov (1977). *Mathematics. Part 1*. Sofia: Technika. (in Bulgarian)
6. Prodanov, I. & I. Chobanov (1976). *Higher mathematics for chemists* (1976). Sofia: Nauka i Izkustvo. (in Bulgarian)

USING DYNAMIC GEOGEBRA VISUALIZATIONS IN THE STUDY OF THE DEPENDENCIES OF TWO VARIABLES IN A UNIVERSITY MATHEMATICS COURSE

Professor Maria Shabanova, doctor of pedagogical sciences
Northern (Arctic) Federal University named after M.V.Lomonosov, Russia

Associate professor Larisa Udovenko, PhD
Moscow Pedagogical State University, Russia

Abstract: *The dependencies of two numerical variables constitute the traditional content of the university mathematics course. Mastering this content is important for students of economic universities.*

Understanding these topics is impossible without geometric interpretation. The GeoGebra dynamic mathematics system provides ample opportunities for creating geometric models of analytical dependencies. The software allows you to create 2D and 3D models that, depending on one or more parameters, experiment with them, display models in the form of augmented reality and explore some of their properties. We suggest using these opportunities not only to support students' activities in solving typical university course tasks.

Keywords: *GeoGebra; University course; Mathematical analysis; Economic education; Spatial models*

JEL code: *A22, C21*

INTRODUCTION

Functions of one and several variables are widely used in economics: production function, utility function, cost function, release function, demand function, consumption function and etc. Significant for the exploration of economic processes are the imaging of the domain of the function, level lines and graphs of the economic functions and the studding of the properties of functions of two variables. As proof, we will give an example of a wish expressed by the authors of the article (Nikolaev & Milkova, 2021). They propose to expand the list of issues included in the content of mathematical training programs for students of economic universities. They note that when studying the functions of two variables in an economic university, one cannot limit oneself to consider only planimetric models. This is due to the fact that in real situations, changes can allow not only variables, but also parameters. In this regard, spatial modeling of functions of two variables is included in the programs of teaching mathematics to students of economic universities: (Kremer, 2010; Bahtin, Ivanishko, Lebedev & Pindrik, 2012; Klushin, 2009).

GEOGEBRA AS A TOOL FOR INVESTIGATING THE FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

Understanding the essence of the studied mathematical methods requires not only frequent reference to their economic application, but also visual monitoring of the progress and results of solving training tasks. We suggest using GeoGebra software to organize students' activities on visualization of functions of one, two and three variables.

The Geogebra website provides a large number of ready-made resources for visualization and assistance in learning the functions of two variables. We suggest not to limit ourselves to them, but to include students in the activity of creating their models, if they need it.

It is better to start studying the functions of two variables by setting tasks for their recognition. To set such problems, you can use the dependencies known to students, taken from the school geometry course and from the economics course.

Task 1. Let there be two variables x and y . If each pair $(x; y)$ from the set $D \subset R^2$ corresponds to a single value of the variable z , then it is said that a function $z = f(x; y)$ of the two variables is given.

Which of the following dependencies can be called a function of two variables:

- $5x + 3y - 4z + 1 = 0$;
- $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 4$
- $z^3 = x^{1,5} \cdot y^{0,3}$?

The solution of the first two problems can be based on the knowledge that students received from school and university courses of analytical geometry and the skills to depict surfaces given by formulas. Students' difficulties in solving such problems are caused by doubts about the legality of using the knowledge gained while studying one area of mathematics in another.

The analytical solution of this task can be based on the use of knowledge of the general formulas of a plane, sphere, and as well as the Cobb– Douglas function (Cobb & Douglas, 1928), known in economics. In the absence of this knowledge, students can, based on the definition of the functions of two variables, evaluate the possibility of reducing the equation to the form: $z = f(x; y)$. This method requires that students have sufficiently well-developed skills of operations on one or both sides of the equation. Difficulties of formal transformations can become an obstacle to understanding the meaning of a new concept - a function of two variables. We propose to use at the first stage the capabilities of GeoGebra. Here you can build a graph by writing the equation in the program input line. Then you can conduct a simple and visual experiment, during which it will be proved that there is a pair $(x; y)$, which corresponds to more than one value of z , or it is shown that such pairs do not exist (fig. 1 a-c).

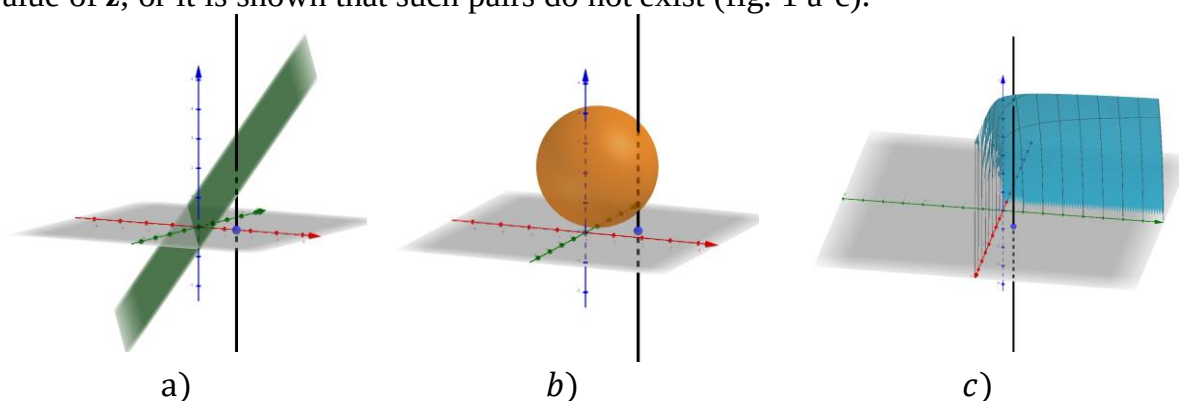


Figure 1. The GeoGebra experiment for recognizing functions

It is also good that such a check creates a way of action, but does not replace an analytical solution due to the limitations of the observed area. Finding the location of the point at which the perpendicular to the plane xOy has intersections with the graph

of the function naturally leads to the formulation of the problem of finding the domain of the function.

Task 2. Investigate the dependence of the domain of definition of the Cobb-Douglas function on the parameters α and β : $Y = A \times K^\alpha \cdot L^\beta$, Y – where production volume, L – labour input; K –financial costs.

Figure 2 (a) presents a resource for studying the dependence of the domain of definition of the Cobb-Douglas function on the parameters α and β .

The image of this area for a function with parameters: $\alpha = 0.5$; $\beta = 0.3$ is shown in Figure 2 (b).

Analytically, the domain of definition of this function is described as a system of inequalities: $\begin{cases} K \geq 0 \\ L \geq 0 \end{cases}$.

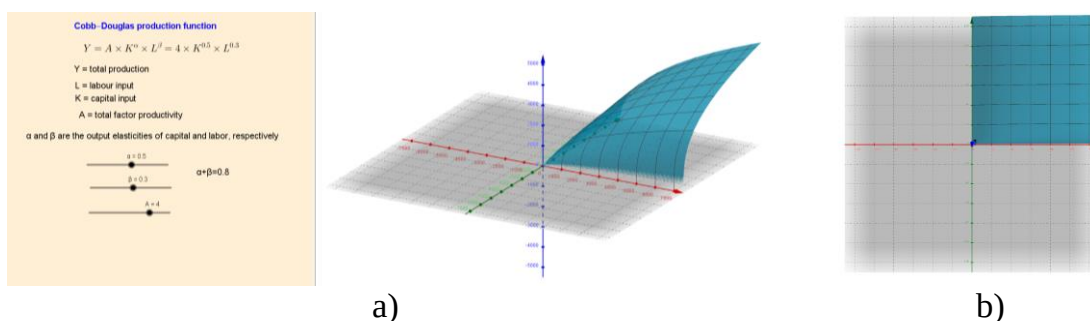


Figure 2. The domain of existence of the Cobb-Douglas function

Freeing the range of values of the parameters A , α and β in the Cobb-Douglas production function from the constraints set by their economic meaning allows us to obtain and investigate a generalized function of two variables given by the equation: $z = A \cdot x^\alpha \cdot y^\beta$ (fig.3).

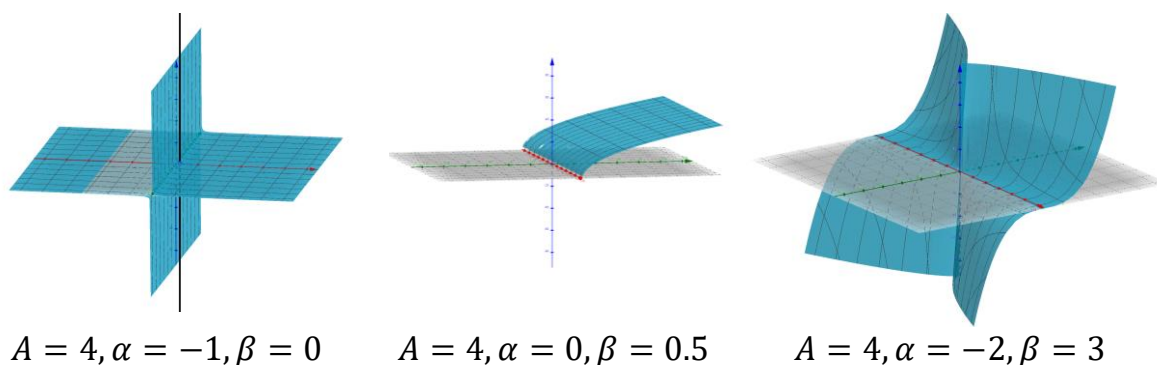


Figure 3. Graphs of the function $z = A \cdot x^\alpha \cdot y^\beta$ for different sets of parameter values

The next step in the study of the functions of two variables is the allocation of level lines, i.e. the geometric location of points in space for which the values of the function of two variables are the same. The skills to identify and describe the level curves are very important for economists, since the level line describes many pairs of parameter values that give the same economic effect. Level curves of production functions are called isoquant, i.e. indifference curves, since they determine sets of factors leading to the release of the same volume of goods. An analytical search of level curves requires

the ability to solve equations of two variables with a parameter. Many students do not have this skill.

Task 3. Find and build level curves of the function: $z = x^{0.5} \cdot y^{0.3}$.

Solution: $a = \sqrt{x} \cdot \sqrt[10]{y^3}$

$a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, y \geq 0 \\ y = 0, x \geq 0 \end{cases}$ – coordinate semi – axes;

$a < 0 \Rightarrow \emptyset$

$a > 0 \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{a^{10}}{x^5}}, x > 0$ – positive branches of hyperboles.

GeoGebra allows you to depict level curves as traces left by implicitly defined curves: $a = \sqrt{x} \cdot \sqrt[10]{y^3}$ with the selected step of iterating over parameter values and as curves of intersection of the function graph with the plane $z = a$ (fig. 4).

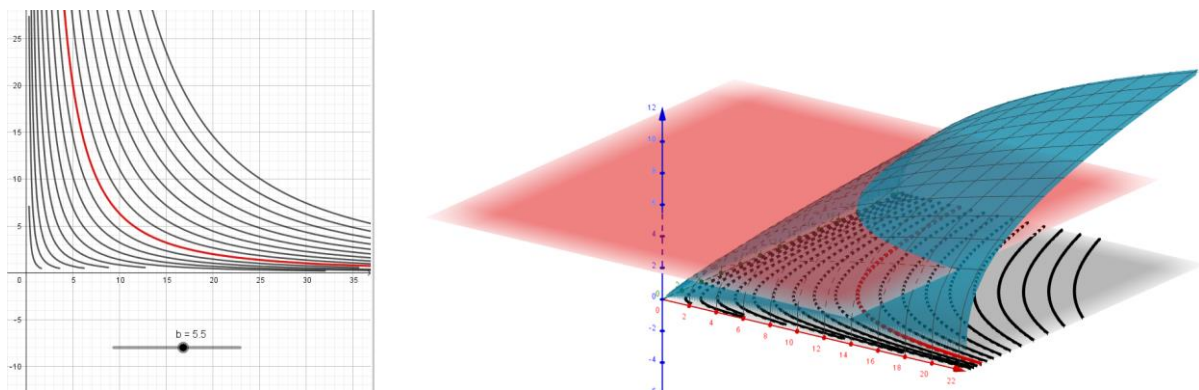
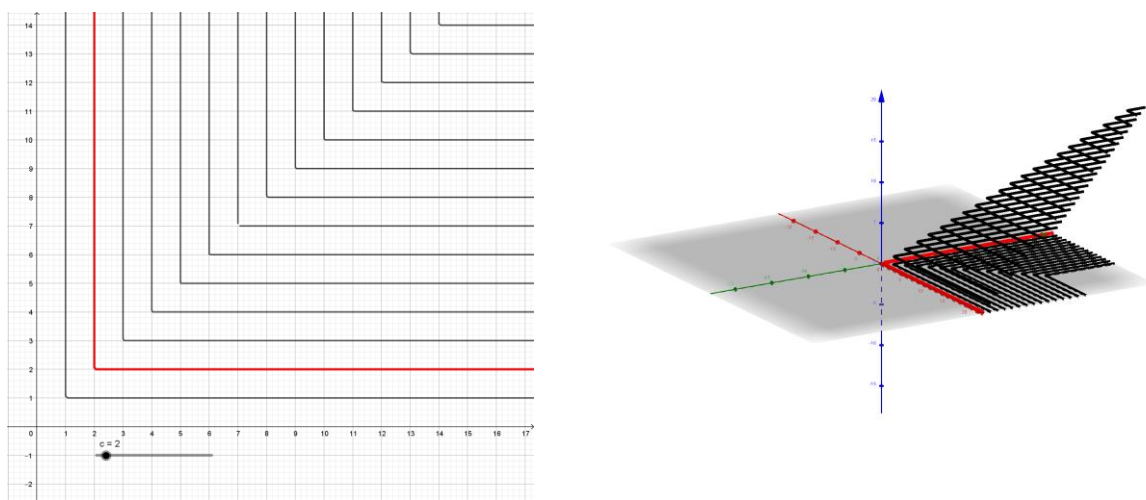


Figure 4. Dynamic model of the level curves

Students should be able not only to depict functions with level curves, but also to correctly understand such images. To form this skill, the tasks of restoring a function from an image of its graph using level curves are useful.

Task 4. Draw a graph of a function of two variables defined by a set of level lines shown in Figure 5 (a), then make up a formula that defines this function.



a) Level curves to task 3

b) The result of solving the task 3.

Figure 5

Task 4 introduces students to another production function, called the Leontief production function "input-output" (Leontief, 1944). The mathematical interest in it is connected with the fact that it is piecewise given: $z = \begin{cases} x, & 0 \leq x < y \\ y, & x \geq y \geq 0 \end{cases}$. The graph of this function is a union of two side faces of a regular quadrangular pyramid.

Another important task for students of economic fields of study is to find the maxima and minima of a function of two variables. The analytical solution of this problem requires the ability to implement the following algorithm:

1. Find partial derivatives of a function: z'_x ; z'_y .
2. Find critical points as solutions to a system of equations: $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$.
3. Find partial derivatives of the second order: z''_{xx} ; z''_{yy} ; z''_{xy} ; z''_{yx} .
4. For each critical point $(x_i; y_i)$, calculate the values of second-order partial derivatives: $A = z''_{xx}(x_i; y_i)$; $B = z''_{xy}(x_i; y_i) = z''_{yx}(x_i; y_i)$; $C = z''_{yy}(x_i; y_i)$.
5. Find the value of the expression: $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$ (the Hess determinant of the 2nd order).
6. Make a conclusion:
If $\Delta > 0$, then at the point $(x_i; y_i)$ the function has an extremum. Moreover, if $A > 0$, then it is the minimum, if $A < 0$, then it is the maximum.
If $\Delta < 0$, then there is no extremum at the point $(x_i; y_i)$ of the function.
If $\Delta = 0$, then the question of the presence of an extremum at the point $(x_i; y_i)$ remains open (additional research is needed).
7. Find the values of the function at the extremum points.

Task 5. Investigate the extremes of the function $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

The analytical solution of this task gives three critical points, two of which are local minima of the function. This is confirmed by the solution according to the algorithm described above.

Step 1. Find partial derivatives of the first order:

$$\begin{aligned} z'_x &= 4x^3 - 4x + 4y \\ z'_y &= 4y^3 + 4x - 4y \end{aligned}$$

Step 2. Find the critical points:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0, \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0, \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = -y, \\ y^3 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y, \\ y(y^2 - 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} (0; 0), \\ (\sqrt{2}; -\sqrt{2}), \\ (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Step 3. Find the partial derivatives of the second order:

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= 12x^2 - 4 \\ z''_{xy} &= 4 \\ z''_{yy} &= 12y^2 - 4 \end{aligned}$$

$$z''_{yx} = 4$$

Step 4. Use the Hesse determinant to study the z function at the extremum:

Point $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$:

$$z''_{xx}(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) = 20$$

$$z''_{xy}(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) = 4$$

$$z''_{yy}(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) = 20$$

$$z''_{yx}(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) = 4$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 384 > 0.$$

The point $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ is the minimum point of the function.

Point $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$:

$$z''_{xx}(\sqrt{2}; -\sqrt{2}) = 20$$

$$z''_{xy}(\sqrt{2}; -\sqrt{2}) = 4$$

$$z''_{yy}(\sqrt{2}; -\sqrt{2}) = 20$$

$$z''_{yx}(\sqrt{2}; -\sqrt{2}) = 4$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 384 > 0.$$

The point $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ is the minimum point of the function.

Point $(0; 0)$:

$$z''_{xx}(0; 0) = -4$$

$$z''_{xy}(0; 0) = 4$$

$$z''_{yy}(0; 0) = -4$$

$$z''_{yx}(0; 0) = 4$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

With respect to the point $(0; 0)$, it is impossible to say whether it is an extremum point or not. In such cases, additional research is required.

Additional research can be based on a direct verification of the definition of the extremum of the function.

Consider the value of the function z on the bisector $y=x$ in the neighborhood of the point $(0; 0)$. We get $z(x, x) = 2x^4 - 2x^2 + 4x^2 - 2x^2 = 2x^4 > 0$.

The value of the function z on the bisector $y = -x$

$$z(x, -x) = 2x^4 - 2x^2 - 4x^2 - 2x^2 = 2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 4) > 0 \text{ for } |x| > 2.$$

The function takes negative values of $z(x, -x) < 0$ in the vicinity of the point $(0; 0)$ for $|x| < 2$.

Thus, following the definition of the extremum, the function, taking both positive values and negative values in the vicinity of the point $(0; 0)$, does not have an extremum at this point.

The use of GeoGebra allows you to delegate the finding of partial derivatives to a computer, and also replace the use of the criterion by directly checking the behavior of the function at the found critical points using a graph (fig.6).

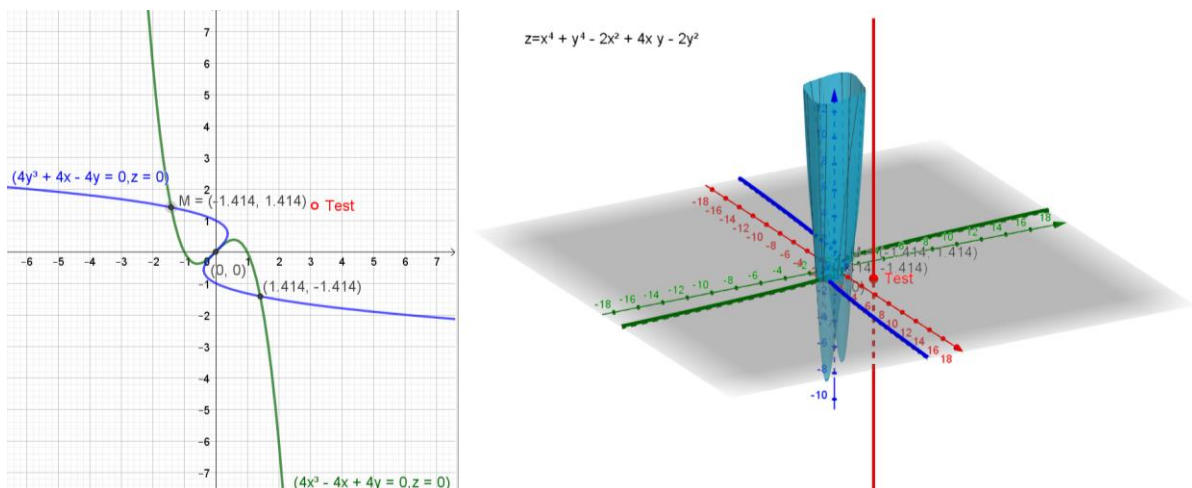
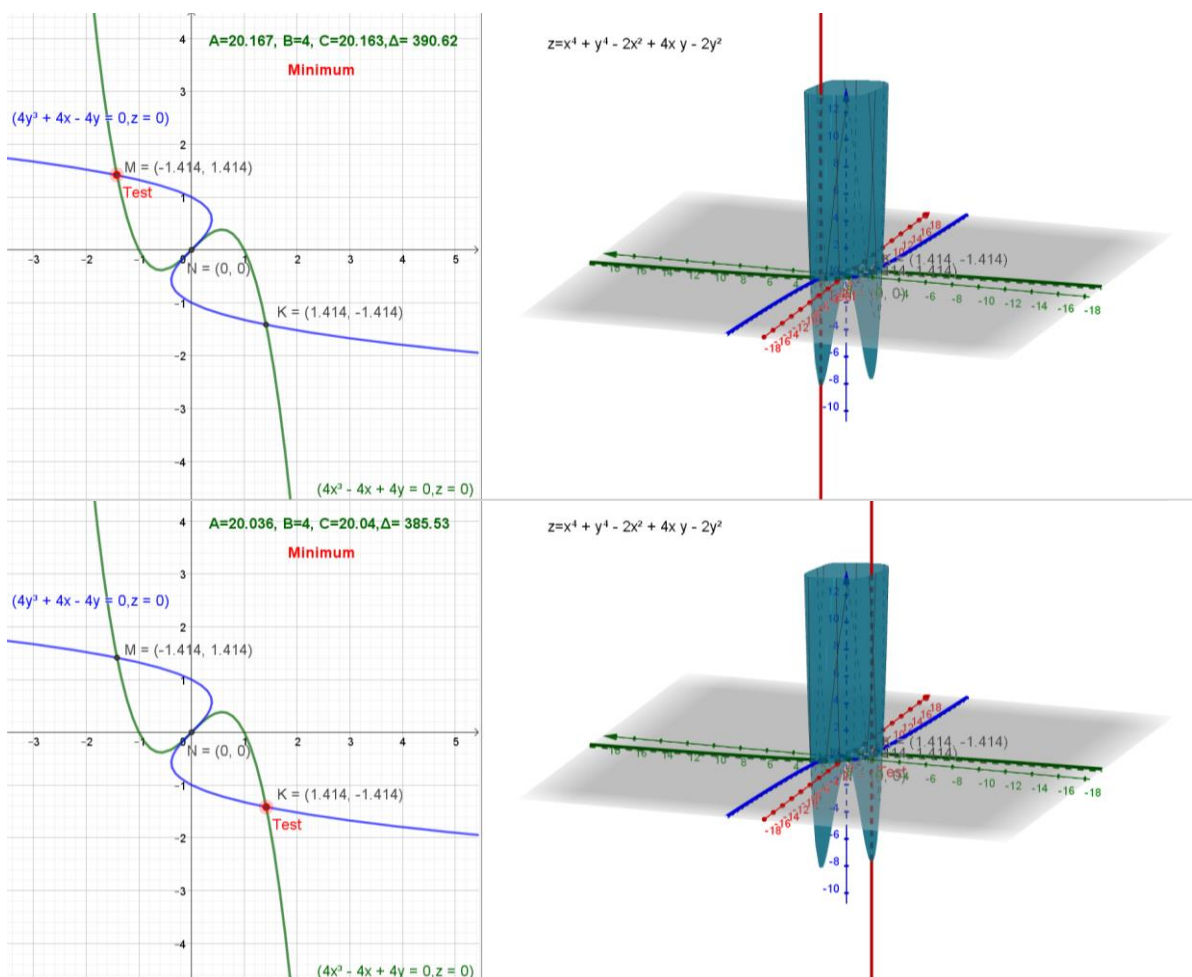
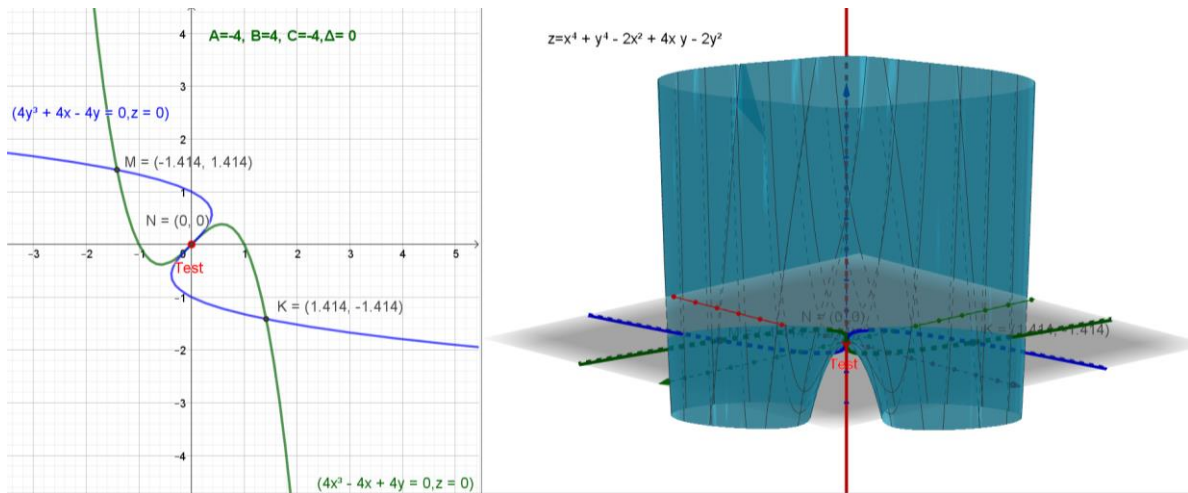


Figure 6. Graphs of the function from task 4 and the first order partial derivatives

In Figure 6, the points M, N and K are the critical points of a given function. Their coordinates are displayed with the selected accuracy. Critical points are found as intersection points of graphs of equations: $z'_x = 0$ and $z'_y = 0$. The “Test” point can move freely. In order to evaluate the behavior of the function in the vicinity of any of the critical points found, it is enough to put the “Test” point and consider the graph of the function (fig.7).



a) M, K are minimum points of the function



b) The algorithm does not allow to determine the nature of the behavior of the function at point N

Figure 7. Dynamic worksheet for computer testing of control points
Shabanova, 2022

Computer calculations show that the above algorithm for finding extremes does not give an answer about the nature of the behavior of the function at point N. To visually determine the behavior of a function at point N, it is better to use the augmented reality effect (fig.8).

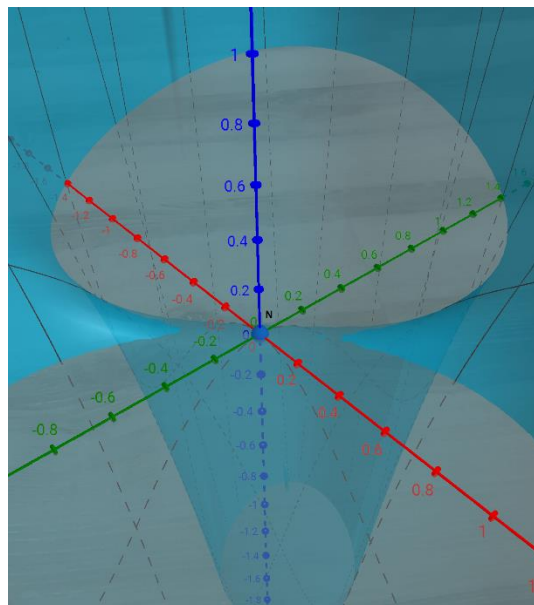


Figure 8. View of the graph of the function in the vicinity of point N
(display in Augmented Reality)

Figure 8 shows that the point N is not an extremum point. Visual cues encourage students to search for an analytical justification.

Optimization problems are very common in economic practice, the solution of which requires the search for conditional extremums of the function.

Task 6. The volume of production is determined by the production function: $Y = 5 \cdot K^{0,25} \cdot L^{0,75}$ and the budget limit is set by the condition: $80 = 10 \cdot K + 10 \cdot L$.

It is necessary to determine what the allocation of resources should be, ensuring maximum output.

The analytical solution of the problem is connected with the use of the method of indefinite Lagrange multipliers.

1. Let's make a Lagrange function with a parameter λ : $l(K, L, \lambda) = 5 \cdot K^{0,25} \cdot L^{0,75} + \lambda \cdot (80 - 10K - 10L)$.

2. We will find the critical points from the solution of the system:
$$\begin{cases} l'_K = 0 \\ l'_L = 0 \\ l'_\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{4} K^{-0,75} \cdot L^{0,75} - 10\lambda = 0 \\ \frac{15}{4} \cdot K^{0,25} \cdot L^{-0,25} - 10\lambda = 0 \\ K + L = 8. \end{cases}$$

Therefor: $K = 2, L = 6, \lambda = \frac{\sqrt[4]{27}}{8} \approx 0,285$.

3. The choice of $K = 2, L = 6$ provides the largest production volume: $5 \cdot 2^{0,25} \cdot 6^{0,75} \approx 22,795$.

With computer computation, this task can be solved by selecting a level line relating to a straight line (fig.9).

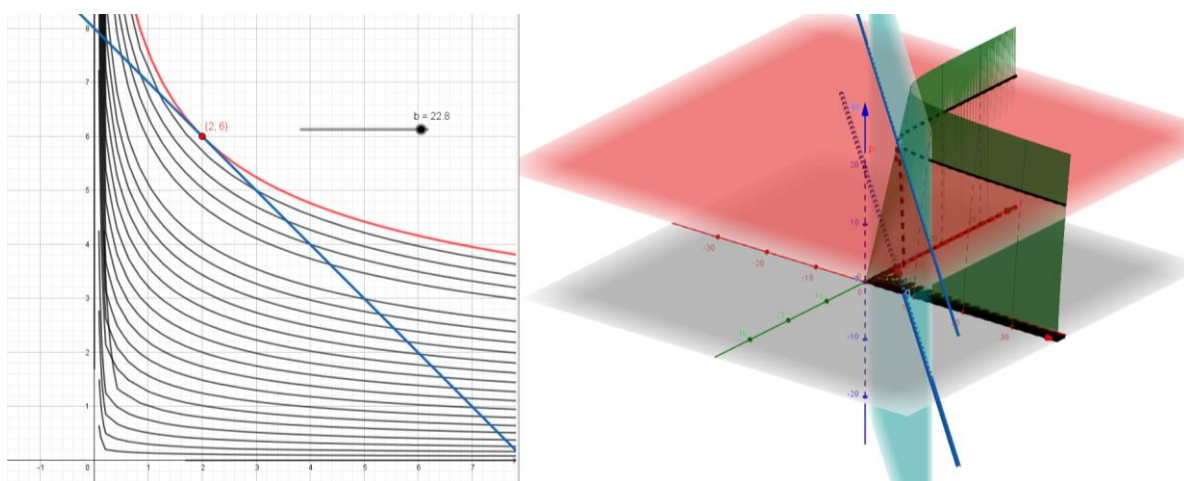


Figure 9. Computational solution of the problem of finding the conditional extremum of the production function

ENDNOTES

1. Functions of two or more variables are a fairly common mathematical model of economic processes. In this regard, the methods of their research should not be excluded from the mathematics course for students of economic fields of training.

2. GeoGebra allows you to support the solution of almost all tasks for the study of functions of two variables: create models of graphs of functions of two variables, represent them with level lines, conduct observations and computer experiments, perform calculations, use the augmented reality effect.

3. The use of GeoGebra makes it easier for students to understand the ideological foundations of the considered methods of studying the functions of two variables, contributes to their rapid development.

REFERENCES

1. Bahtin. V. I., Ivanishko I. A., Lebedev A. V., Pindrik O. I. (2012). Metod mnozhitelej Lagranzha : metod. posobie dlya studentov spec. 1-31 03 01-03 «Matematika (ekonomicheskaya deyatel'nost')». Minsk : BGU, 40p.
2. Cobb C. W.& Douglas P. H. (1928). "A theory of production," American Economic Review, vol. 18, pp. 139–165.
3. GeoGebra website. Available at: <<https://www.geogebra.org/>> [Accessed 7 September 2022].
4. Klyushin V.L. (2009). Vysshaya matematika dlya ekonomistov: Ucheb. Posobie., M.: INFRA-M, 448 p.
5. Leontief, Wassily. (1944). Output, Employment, Consumption, and Investment The Quarterly Journal of Economics, Volume 58, Issue 2, pp. 290-314.
6. Nikolaev, R., Milkova, T. (2021). Two-Dimensional Problem for Using the Resources with Inconstant Expense Rates. Izvestia Journal of the Union of Scientists - Varna. Economic Sciences Series, 10(1), pp.141-148.
7. Kremer N.SH. (2010). Vysshaya matematika dlya ekonomistov: uchebnik dlya studentov vuzov, obuchayushchihsya po ekonomicheskim special'nostyam / [N.SH. Kremer i dr.]; pod red. prof. H.SH. Kremera. 3-e izd. M.: YUNITI-DANA, 479 p.
8. Shabanova M. (2022). Tochki ekstremuma funktsii dvuh peremennykh [online] Available at: < <https://www.geogebra.org/m/rvnbpv6y> > [Accessed 7 September 2022].

CONSTRUCTION OF A NORMAL CURVE BASED ON EMPIRICAL DATA USING THE CASIO fx-CG20 GRAPHING CALCULATOR

Marat Gabidullin, student

Moscow Regional Social and Economic Institute, Russia

Ulyana Rozanova, student

Moscow Regional Social and Economic Institute, Russia

Alexander Lukankin, PhD

Moscow Regional Social and Economic Institute, Russia

Abstract: Most of the seemingly diverse intellectual tasks that students face in the learning process can be solved through the development of conceptual thinking. Conceptual thinking can be formed only by systematically studying the basics of natural sciences. When studying mathematical statistics, students face a number of difficulties. You can help the student by explaining the material on the example of practical problems and in comparing attempts to solve them, which requires a lot of study time for calculations. Modern models of scientific calculators are called "calculators" only by force of habit. The software of the CASIO fx-CG20 graphical calculator is an analogue of the Excel computer program and the popular MathCad math package. The calculator is distinguished by its versatility, ease of operation, compactness and, most importantly, mobility.

Keywords: Fundamental mathematical knowledge; Information technology; CASIO

JEL code: C88

ПОСТРОЕНИЕ НОРМАЛЬНОЙ КРИВОЙ ПО ЭМПИРИЧЕСКИМ ДАННЫМ ПРИ ПОМОЩИ ГРАФИЧЕСКОГО КАЛЬКУЛЯТОРА CASIO fx-CG20

Марат Габидуллин, студент

Московский региональный социально-экономический институт, Россия

Ульяна Розанова, студент

Московский региональный социально-экономический институт, Россия

К. ф.-м. н. доц. Александр Луканкин

Московский региональный социально-экономический институт, Россия

Введение

Реформирование Российского и Болгарского высшего профессионального образования затруднено не только сложным многообразием и масштабностью необходимых перемен, но и отсутствием у реформаторов единых представлений о стратегических приоритетах и темпах этого процесса. Отличительной чертой нашего образования всегда был высокий уровень естественно-математической подготовки. Большинство из кажущегося многообразия интеллектуальных задач, возникающих перед студентами в процессе обучения, может быть решено с помощью развития *понятийного мышления*. Сформировать *понятийное мышление* можно только систематически изучая основы естественных наук. Обучающиеся должны усвоить не отдельные сведения, а основы наук в

определенной системе. Для этого необходимы стабильные (утвержденные на ряд лет) программы и учебники, разработанные как *единая система*. Без качественного естественно-математического образования личности не будет.

При изучении математической статистики студенты сталкиваются с рядом трудностей. Часто студент не может понять, с какой целью автор учебника применяет тот или иной сложный аппарат, те или иные громоздкие рассуждения и как можно было к этому прийти. Можно помочь обучающемуся, пояснив материал на примере практических задач и в сопоставлении попыток их решения, что требует больших затрат учебного времени на вычисления. Примером известного средства обучения, которое хорошо зарекомендовало себя в обучении математике, физике, экономике и другим учебным предметам, в тех разделах, где требуется проводить достаточно сложные вычисления, является калькулятор. Калькулятор применяется в обучении более 30 лет и является едва ли не первым массовым средством информатизации образования вообще. Современные же модели научных калькуляторов называются «калькулятором» лишь в силу привычки. На самом деле по своим функциональным характеристикам это уже математический микрокомпьютер. Программное обеспечение графического калькулятора CASIO fx-CG20 является аналогом компьютерной программы Excel и популярного математического пакета MathCad. В принципе, все расчеты можно было бы провести в этих пакетах, но калькулятор отличается своей многофункциональностью, удобством действий, компактностью и, самое главное, мобильностью.

Метод произведений

Рассмотрим возможности графического калькулятора CASIO CG-20 для построения нормальной кривой по эмпирическим данным.

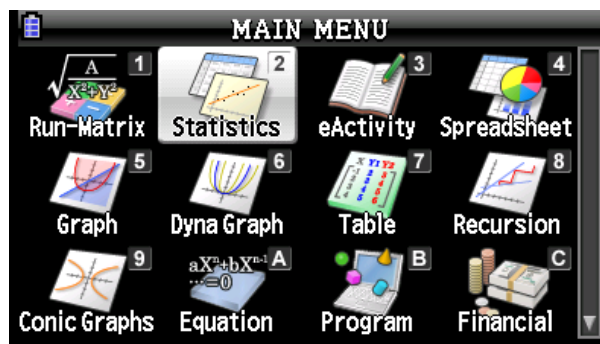
В результате первичной обработки статистических данных о росте студентов института получено распределение (табл. 1)

Таблица 1

Выборка равноотстоящих вариантов

150	155	160	165	170	175	180	185	190
5	18	71	145	173	141	81	35	8

Пользуясь методом произведений, найдем $\bar{x}$ и σ . В главном меню калькулятора выберем режим Statistics (фиг.1) и введем данные:



Фиг. 1. Вид главного меню.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	150	5	-4	
2	155	18	-3	
3	160	71	-2	
4	165	145	-1	

List 2 x List 3

Фиг.2. Ввод исходных данных.

1. В первый столбец таблицы (List 1) записывают первоначальные варианты, располагая их в возрастающем порядке.
2. Во второй столбец (List 2) записывают частоты вариантов.
3. В третий столбец записывают условные варианты $u_i = \frac{x_i - C}{h}$, причем в качестве ложного нуля C выбирают варианту, которая расположена примерно в середине вариационного ряда, и полагают шаг h равным разности между любыми двумя соседними вариантами; практически третий столбец можно заполнить так: в клетке строки, содержащей выбранный ложный нуль, пишут 0; в клетках над нулем пишут последовательно $-1, -2, -3$ и т. д., а под нулем $1, 2, 3$ и т. д.;
4. Умножаем частоты на условные варианты и записываем их произведения $n_i u_i$ в четвертый столбец. В командной строке набираем: List 2 $\times$ List 3 (рис. 2). Для этого нажимаем клавиши: [SHIFT][1][2][$\times$][SHIFT][1][3].
5. Умножаем частоты на квадраты вариантов и записываем их произведения $n_i u_i^2$ в пятый столбец (List 5). Заметим, что для вычисления произведений $n_i u_i^2$ пятого столбца удобно числа $n_i u_i$ четвертого столбца умножить на u_i .
6. Умножаем частоты на квадраты условных вариантов, увеличенных каждая на единицу, и записывают произведения $n_i (u_i + 1)^2$ в шестой столбец (List 6). Делает это нажатием клавиш: [SHIFT][1][2][$\times$][(] [SHIFT][1][3][+][1][)][x^2][EXE] (фиг. 3).

CASIO				
	Rad	Norm1	d/c	Real
	List 3	List 4	List 5	List 6
SUB				
1	-4	-20	80	
2	-3	-54	162	
3	-2	-142	284	
4	-1	-145	145	
List 2×(List 3+1) ²				

Фиг. 3. Вычисление произведения $n_i(u_i + 1)^2$.

7. Суммируют все частоты (List 2) и их сумму (объем выборки n) записывают в нижнюю клетку столбца. Для этого устанавливаем курсор в последнюю ячейку List 2; нажимаем на кнопку [OPTN] (в результате изменяются экранные кнопки); нажимаем [F1](LIST); два раза нажимаем [F6](►); далее [F1][SHIFT][1][2]. В командной строке получилась запись: Sum List 2. Нажимаем [EXE]. В выбранной ячейке результат: 677.

8. Аналогично сложив все полученные числа в List 4, их сумму $\sum n_i u_i$ помещают в нижнюю ячейку List 4.

9. Сложив все полученные числа List 5, их сумму $\sum n_i u_i^2$ помещают в нижнюю ячейку.

10. Сложив все полученные числа List 6, их сумму $\sum n_i (u_i + 1)^2$ помещают в нижнюю ячейку столбца. Отметим, что шестой столбец служит для контроля вычислений: если сумма $\sum n_i (u_i + 1)^2$ окажется равной сумме $\sum n_i u_i^2 + 2 \sum n_i u_i + n$, то вычисления проведены правильно (таб. 2).

Таблица 2

Вычисление выборочных среднего и дисперсии

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i (u_i + 1)^2$
150	5	-4	-20	80	45
155	18	-3	-54	162	72
160	71	-2	-142	284	71
165	145	-1	-145	145	0
170	173	0	0	0	173
175	141	1	141	141	564
180	81	2	162	324	729
185	35	3	105	315	560
190	8	4	32	128	200
	$n = 677$		$\sum n_i u_i = 79$	$\sum n_i u_i^2 = 1579$	$\sum n_i (u_i + 1)^2 = 2414$

Проведем контроль:

$$\sum n_i u_i^2 + 2 \sum n_i u_i + n = 1579 + 2 \cdot 79 + 677 = 2414 = \sum n_i (u_i + 1)^2.$$

Следовательно, вычисления проведены правильно.

После того как расчетная таблица заполнена и проверена правильность вычислений, вычисляют условные моменты:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n}, \quad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n}.$$

Далее вычисляем выборочные среднее и дисперсию:

$$\bar{x} = M_1^* h + C, \quad S_0 = [M_2^* - (M_1^*)^2] h^2.$$

Вычислим условные моменты первого и второго порядков:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{79}{677} = 0,116, \quad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{1579}{677} = 2,332.$$

Найдем шаг: $h = 155 - 150 = 5$.

Вычислим искомые выборочные среднее и дисперсию:

$$\bar{x} = M_1^* h + C = 0,116 \cdot 5 + 170 = 170,58,$$

$$S_0 = [M_2^* - (M_1^*)^2] h^2 \approx 57,97, \quad \sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1} S_0} \approx 7,62.$$

Статистическая проверка гипотезы

Изобразим пары чисел (List 1; List2) в виде точек на координатной плоскости. Для этого выбираем [F1](GRAPH) (фиг.4). Нажатием [F6](SET) открываем меню настроек (фиг. 5 - 6). В строке “Graph Type” выбираем вариант “Scatter”. По строкам перемещаемся при помощи джойстика. Выберем координаты. Для этого в строке XList укажем List 1, а в YList – List 2. В строке Mark Type можно выбрать вариант метки (например, F2). Нажатием клавиши [EXIT] возвращаемся к экрану рис. 5 и выбираем [F1]. В результате получаем изображение точек (фиг. 7).

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	150	5	-20.58	-2.7
2	155	18	-15.58	-2.044
3	160	71	-10.58	-1.388
4	165	145	-5.58	-0.732

150

GRAPH CALC TEST INTR DIST

Trace Zoom V-Window Sketch G-Solv G-T

F1 F2 F3 F4 F5 F6

Фиг. 4

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	150	5	-20.58	-2.7
2	155	18	-15.58	-2.044
3	160	71	-10.58	-1.388
4	165	145	-5.58	-0.732

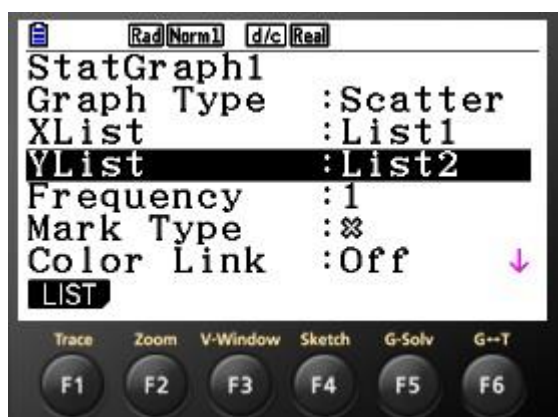
150

GRAPH1 GRAPH2 GRAPH3 SELECT SET

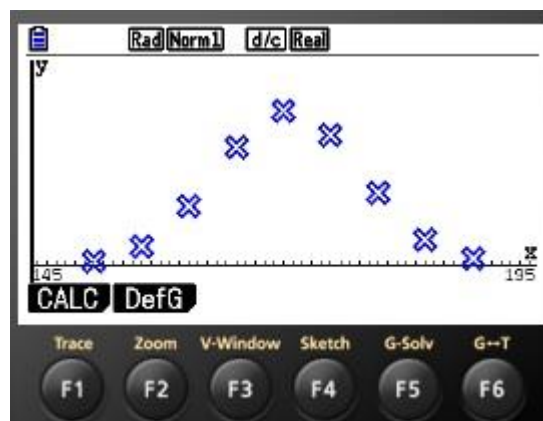
Trace Zoom V-Window Sketch G-Solv G-T

F1 F2 F3 F4 F5 F6

Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Полученная двумерная генеральная совокупность позволяет предположить, что случайная величина распределена нормально. Для проверки этого предположения воспользуемся критерием согласия Пирсона. Рассмотрим нулевую гипотезу H_0 (генеральная совокупность распределена по закону Гаусса) и альтернативную H_1 (генеральная совокупность не распределена по закону Гаусса). Проведем проверку гипотез при уровне значимости 0,05 и 0,01. При помощи калькулятора составим расчетные таблицы 3 и 4:

Таблица 3

Расчетная таблица

$[x_i; x_{i+1})$	$(-\infty; 152,5)$	$[152,5; 157,5)$	$[157,5; 162,5)$	$[162,5; 167,5)$	$[167,5; 172,2)$	$[172,5; 177,5)$	$[177,5; 182,5)$	$[182,5; 187,5)$	$[187,5; +\infty)$
n_i	5	18	71	145	173	141	81	35	8
p_i	0,01	0,03	0,10	0,20	0,26	0,22	0,12	0,05	0,01
n'_i	7	20	68	135	176	149	81	34	7

Для вычисления теоретических частот используем таблицу значений функции Лапласа. Из полученной таблицы видно, что эмпирические и теоретические частоты различаются. Случайно ли расхождение частот? Возможно, что расхождение случайно (незначимо) и вызвано либо малым числом измерений, либо способом их группировки, либо другими причинами. Возможно, что расхождение частот неслучайно (значимо) и вызвано тем, что теоретические частоты вычислены исходя из неверного предположения о нормальном распределении генеральной совокупности. Вычислим $\chi^2_{эмп}$, для чего, при помощи калькулятора, составим ещё одну таблицу 4:

Таблица 4

Расчетная таблица

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n'_i}$
1	5	7	-2	4	0,5714	25	3,5714
2	18	20	-2	4	0,2	324	16,2
3	71	68	3	9	0,1323	5041	74,132
4	145	135	10	100	0,7407	21025	155,74
5	173	176	-3	9	0,0511	29929	170,05
6	141	149	-8	64	0,4395	19881	133,42
7	81	81	0	0	0	6561	81
8	35	34	1	1	0,0294	1225	36,029
9	8	7	1	1	0,1428	64	9,1428
Σ	677	677			2,29		679,29

$$\chi^2_{эмп} = \sum_i \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} \approx 2,29$$

Проведем контроль: $\frac{n_i^2}{n'_i} - n = 679,29 - 677 = 2,29$.

Вычисления проведены правильно.

Найдем число степеней свободы: $k = 9 - 2 - 1 = 6$.

По таблице критических точек распределения χ^2 по уровню значимости и числу степеней свободы находим:

$$\chi^2_{кр}(0,05; 6) = 12,6; \chi^2_{кр}(0,01; 6) = 16,8.$$

Так как $\chi^2_{эмп} < \chi^2_{кр}$ - нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Таким образом, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое и данные наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

Построение нормальной кривой

Для построения нормальной кривой по данным наблюдений можно воспользоваться алгоритмом:

1) Зная $\bar{x}$ и σ , находим ординаты y_i (выравнивающие частоты) теоретической кривой по формуле

$$y_i = \frac{nh}{\sigma} \varphi(u_i),$$

где n – сумма наблюдаемых частот, h – разность между двумя соседними вариантами, $u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$ и $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$.

2) строим точки $(x_i; y_i)$ в декартовой прямоугольной системе координат и соединяем их плавной кривой.

Вычислим выравнивающие частоты (фиг. 8).

	Rad	Norm1	d/c	Real
	List 2	List 3	List 4	List 5
SUB				
1	5	-20.58	-2.7	
2	18	-15.58	-2.044	
3	71	-10.58	-1.388	
4	145	-5.58	-0.732	
$1 \div \sqrt{(2 \times \pi)} \times e^{(-List\ 4^2 \div$				

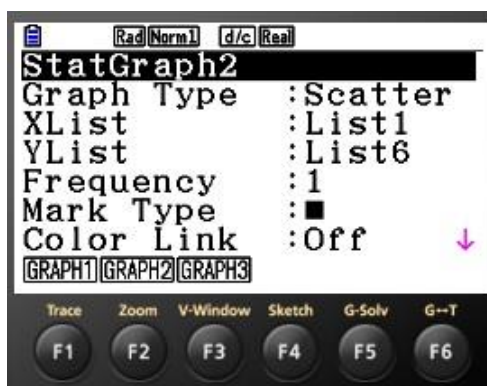
Фиг. 8. Вычисление выравнивающих частот

Таблица 5

Вычисление выравнивающих частот

x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	u_i	$\phi(u_i)$	y_i
150	5	- 20,58	- 2,7	0,0103	4,619
155	18	- 15,58	- 2,04	0,0493	21,914
160	71	- 10,58	- 1,39	0,1521	67,592
165	145	- 5,58	- 0,73	0,3051	135,54
170	173	- 0,58	- 0,08	0,3977	176,7
175	141	4,42	0,58	0,3371	149,77
180	81	9,42	1,23	0,1858	82,539
185	35	14,42	1,89	0,0665	29,571
190	8	19,42	2,54	0,0155	6,888

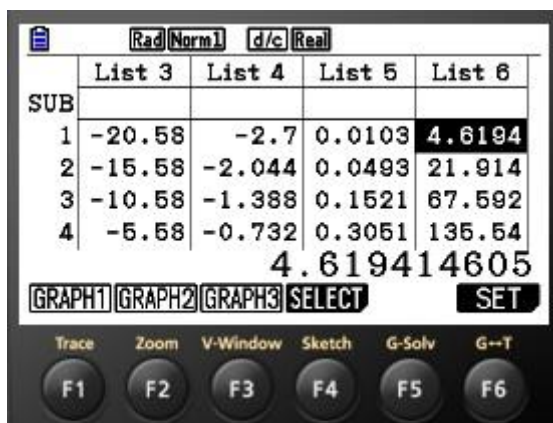
По координатам List 1 и List 2 построим точки (как это было показано выше). Затем переведем курсор в позицию StatGraph1 и «F2» выберем режим настройки второго графика. Для второго графика установим настройки как показано на фиг. 9. Затем клавишей «EXIT» вернемся в исходное окно настройки графиков функций (фиг. 11) и клавишей «F4» перейдем в режим выбора графиков для построения (фиг. 10). В открывшемся окне StatGraph1 имеет параметр «DrawOn», т.е. «строить». В остальных установлен «DrawOff», т.е. «не строить». Чтобы построить одновременно сразу два графика нужно параметр для второго графика установить в «DrawOn» клавишей «F1» (фиг.12). Затем клавишей «F6» построим графики (фиг.13).



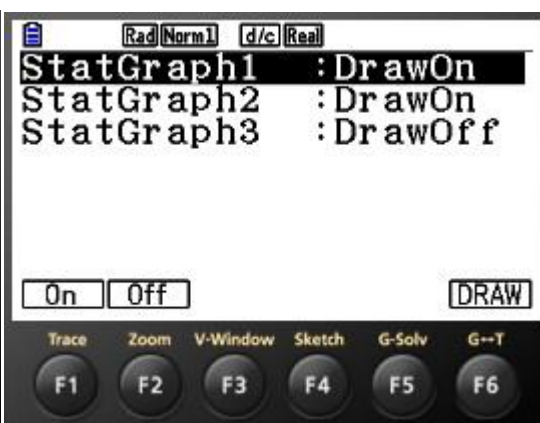
Фиг. 9



Фиг.10

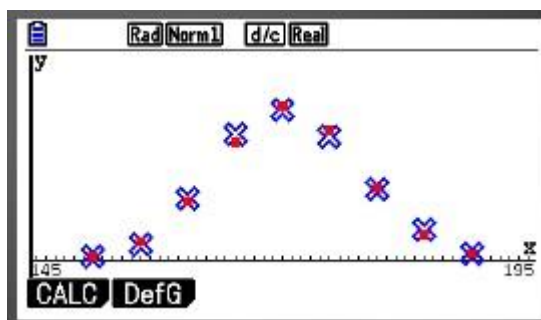


Фиг. 11



Фиг.12

На фиг. 13 построены нормальная (теоретическая) кривая по выравнивающим частотам и полигон наблюдаемых частот Сравнение графиков показывает, что построенная теоретическая кривая удовлетворительно отражает данные наблюдений. Следует обратить внимание на то, что локальный максимум теоретической кривой не совпадает с максимальным значением выборки (часто распространенная ошибка, допускаемая студентами, строящими график функции «от руки»).



Фиг. 13. Эмпирические и теоретические точки

Близость выравнивающих частот к наблюдаемым подтверждает правильность допущения о том, что обследуемый признак распределен нормально.

Заключение

Нами был проведен анализ роста студентов АНО ВО МРСЭИ, их учёт и статистическое распределение. Для анализа статистических данных был применен калькулятор CASIO fx-CG20, который очень упрощает работу при решении задач, помогает экономить время и избегать вычислительных ошибок.

В связи с этим хотелось бы отметить, что ведущая роль математики в образовании обусловлена тем, что именно она вырабатывает навыки ДОБЫВАТЬ знания через формирование логико-доказательной базы, методов решения задач и т.д. Наш опыт применения калькуляторов в учебном процессе показал: дидактические возможности встроенного программного обеспечения CASIO fx-CG20 не уступают известным пакетам MathCad, Mathematica, Excel и т.п., а по удобству применения учебном процессе и цене значительно превосходят персональный компьютер. Применение указанных технологий позволяет

использовать статистические данные из открытых источников, что меняет содержание традиционных учебных курсов. Все это дает возможность преподавателям МРСЭИ обновить содержание традиционно читаемых математических и экономических курсов и готовить конкурентноспособных специалистов.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Gmurman V. E. (2005). Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika: Ucheb. posobiye dlya vuzov / V.E. Gmurman. – 11-ye izd., ster. – М.: Vyssh.shk., – 479 s.
2. Minayeva S. S., Nikitina N. S., Smekalin D. O., Grudzinskiy A. V. /pod redaktsiyey Vostroknutova I. E. (2011). Resheniye zadach po statistike s ispolzovaniyem malykh vychislitelnykh sredstv: metodicheskiye rekomendatsii k izucheniyu statisticheskogo materiala v 7 – 9 klassah. –М.: Navigator, -116 s.

PARTICIPATION OF THE UNIVERSITY OF ECONOMICS – VARNA IN THE NATIONAL MATHEMATICS OLYMPIAD FOR UNIVERSITY STUDENTS (2016-2022)

Prof. Rosen Nikolaev, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Chief Assist. Prof. Yordan Petkov, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *In this paper, an attempt has been made to outline the place and role of the University of Economics - Varna in the most significant student math competition in Bulgaria - the National Mathematics Olympiad for University Students. Therefore, the performance of the students in the last six editions of the competition was tracked. The role of university teachers in the Olympiad is demonstrated through a selection of problems that have been proposed and found a place in the competition themes over the years. Methodological solutions to these problems are also presented.*

Keywords: *Education; Mathematics; Methodology; Olympiad*

JEL code: *C00, I23*

УЧАСТИЯ НА ИКОНОМИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА В НАЦИОНАЛНАТА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА (2016-2022 Г.)

Проф. д-р Росен Николаев
Икономически университет – Варна, България

Гл. ас. д-р Йордан Петков
Икономически университет – Варна, България

Въведение

Националната студентска олимпиада по математика (НСОМ) е най-голямото и престижно състезание по математика между студенти от бакалавърски и магистърски програми в България. Ясен показател за значимостта ѝ е както нарастващият брой участващи университети от страната, така и привличането на чуждестранни участници през последните години. Олимпиадата се организира от 1974 г. от висшите училища в страната със съдействието на Министерството на образованието и науката, Националното представителство на студентските съвети в Република България и Фондация „Еврика”. Съгласно регламента на състезанието (2022 (1)), целта му е да се повишава интересът на студентите към математиката и да се създават условия за обмен на опит сред преподавателските екипи. Форумът събира най-добрите студенти с интереси в областта на математиката от цялата страна. Те се разпределят в три състезателни групи в зависимост от хорариума по математически дисциплини, изучавани в първи курс: *група А* – математика, информатика и компютърни науки (≥ 420 учебни часа); *група Б* – природни и технически науки, сигурност и отбрана (≤ 420 , но ≥ 241

учебни часа); *група В* – всички неизброени в групи *А* и *Б* (≤ 240 учебни часа). В последната група попадат всички специалности в Икономически университет – Варна. Конспектите на трите групи (2022 (2)) включват теми от фундаменталните математически дисциплини, заложи в учебните планове на специалностите от различни научни направления в различните висши училища, като алгебра, аналитична геометрия, анализ и теория на вероятностите.

Икономически университет – Варна е редовен и един от най-активните участници в НСОМ. Студенти от висшето училище традиционно заемат челни места в група *В*, в която основни конкуренти са Стопански факултет на СУ „Климент Охридски“, Висше училище по застраховане и финанси и УНСС.

Подборът и подготовката на студенти от Икономически университет – Варна за участие в олимпиадата преминава през провеждането на два вътрешни подборни кръга и допълнителни занятия с избраните студенти върху темите, включени в конспектите на състезанието (Господинова и Ангелов, 2015; Николаев, Петков и Господинова, 2016). Дългогодишен отговорник за провеждане на вътрешните кръгове, за подготовката, както и ръководител на отборите за националната олимпиада е проф. д-р Росен Николаев. От 2006 г. тези функции се изпълняват предимно от гл. ас. д-р Йордан Петков, а през 2022 г. ръководител на отбора е гл. ас. д-р Деян Михайлов. По отношение участието на членове на катедрата в организирането и провеждането на НСОМ, през разглеждания период проф. д-р Росен Николаев е неизменно член на Националната комисия – основен ръководен орган за организиране и провеждане на олимпиадата, както и на Националното жури. Член на Националната комисия и Националното жури през 2021 г. и 2022 г. е и гл. ас. д-р Йордан Петков.

Настоящият доклад има предимно обзоре характер и цели да представи участието на ИУ-Варна в НСОМ както от страна на студентите-състезатели, така и от страна на преподаватели от катедра „Статистика и приложна математика“. Той представлява естествено продължение на публикация на същите автори от 2015 г. (Николаев и Петков, 2015).

1. Представяне на студентите от Икономически университет - Варна на НСОМ в периода 2016 - 2022 г.

Ще направим кратка ретроспекция на представянето на студентите от ИУ-Варна на НСОМ през последните шест години.

На проведената през 2016 г. олимпиада ИУ-Варна участва с два отбора – един в група *Б* и един в група *В*. В отборното класиране и в класирането по висши училища в група *В* отборът на ИУ-Варна зае второ място след Стопански факултет на СУ „Климент Охридски“. В индивидуалното класиране на същата група бяха спечелени 1 сребърен и 3 бронзови медала. Бронзов медал завоюва и един от участниците в група *Б*.

През 2017 г. ИУ-Варна е представен от един отбор в група *В* с четири участника. Както в отборното класиране, така и в класирането по висши училища, те печелят първо място, следвани от Стопански факултет на СУ „Св. Климент Охридски“ и Висше училище по застраховане и финанси. В индивидуалното класиране са завоювани 1 златен медал (първо място) и 2 бронзови медала.

През 2018 г. отборът на ИУ-Варна заема второ място в отборното класиране и класирането по висши училища на група В, след Технически университет - Варна и с равен брой точки с Висшето училище по застраховане и финанси. В индивидуалното класиране на същата група са спечелени 1 златен, 1 сребърен и 3 бронзови медала.

През 2019 г. ИУ-Варна е представляван от отбор с пет участника в група В. Всички те печелят отличия в индивидуалното класиране – 3 сребърни и 2 бронзови медала. Това се оказва достатъчно да заемат и първите места в отборното класиране и класирането по висши училища в тази група.

На домакинската олимпиада през 2021 г. ИУ-Варна участва с отбор от четирима студенти в група В. Спечелени са 1 сребърен и 1 бронзов медал. Университетът заема втори места в отборното класиране и в класирането по висши училища - след Стопански факултет на СУ „Св. Климент Охридски”.

На Националната студентска олимпиада по математика през 2022 г. ИУ-Варна участва с един отбор в група В, като заема трето място в отборното класиране и в класирането по висши училища - след УНСС и Стопански факултет на СУ „Св. Климент Охридски”. Спечелени са и три отличия в индивидуалното класиране – 1 златен и 2 сребърни медала.

Направената равностметка дава основание да заключим, че представянето на студентите от Икономически университет - Варна на НСОМ продължава да бъде изключително успешно и през разглеждания период. В последните шест издания на олимпиадата те са завоювали общо 23 медала, от които 3 златни, 8 сребърни и 12 бронзови. Освен това отборите на университета са попадали 6 пъти в челната тройка на отборните класирания и класиранията по висши училища, като два пъти са печелили първо място, три пъти второ място и един път трето място.

2. Участие на преподаватели от катедра „Статистика и приложна математика“ в организирането и провеждането на НСОМ в периода 2016-2022 г.

Представители на катедра „Статистика и приложна математика“ продължават традицията да участват дейно в организирането и провеждането на НСОМ през разглеждания период.

Икономически университет – Варна е домакин и основен организатор на НСОМ-2021, която се проведе след едногодишно прекъсване, предизвикано от Covid-19 пандемията и беше посветена на 100-годишнината на висшето училище.

Освен това, както беше споменато, представители на катедрата участват неизменно в Националното жури на състезанието, като седем задачи, предложени от тях, са избирани в състезателните теми за групи Б и В. Това прави приблизително 12% от всички състезателни задачи за последните шест години.

При съставянето и предлагането на задачи за НСОМ авторите са се водили от следните свои разбирания, подкрепяни и от други техни колеги (Гроздев и Ненков, 2014):

- Задачите за олимпиада трябва да дават възможност за проявяване на творчество и нестандартно мислене от страна на състезателите. Ето защо е

желателно те да предполагат наличието на повече от един метод за намиране на решение.

- Освен състезателен характер, олимпиадите имат и сериозен принос за повишаване на подготовката на част от студентите и учениците. Затова е важно задачите да бъдат такива, че да имат характер на малко научно изследване, като до решението на състезателна задача следва да се достига с използване на знания от различни дялове на математиката.

В по-нататъшното изложение ще представим на вниманието на читателя тези авторски задачи, придружени с методически решения. Решения на някои от тях са предложени и в други публикации с участието на авторите (Гроздев, Николаев и Ненков, 2017; Гроздев и кол., 2018; Йорданов и кол., 2022).

Задача 1 (НСОМ-2016, група Б). Дадена е детерминантата

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

а) Да се реши уравнението $D_3(\cos t) = 0$.

б) Да се докаже, че $D_n(x) = (x-1)^{n-1}(x+n-1)$ и да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x) = D_n(x)$.

Решение.

$$\text{а) } D_3(\cos t) = \begin{vmatrix} \cos t & 1 & 1 \\ 1 & \cos t & 1 \\ 1 & 1 & \cos t \end{vmatrix} = \cos^3 t - 3\cos t + 2 = 0 \Leftrightarrow (\cos t - 1)^2(\cos t + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 2l\pi, l \in \mathbb{Z}.$$

б) Прибавяме всички стълбове от втория до n -тия към първия стълб на детерминантата и получаваме

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x+n-1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x+n-1 & x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x+n-1 & 1 & x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x+n-1 & 1 & 1 & x & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x+n-1 & 1 & 1 & 1 & \dots & x & 1 \\ x+n-1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

Сега умножаваме първия ред по (-1) и го прибавяме към останалите. Детерминантата се преобразува в триъгълна и

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x+n-1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+n-1)(x-1)^{n-1}.$$

При $n=1$, $f(x)=x$ и няма локални екстремуми. При $n>1$, $f'(x)=n(x-1)^{n-2}(x+n-2)$. Ако n – четно, то функцията $f(x)$ намалява за $x \in (-\infty, 2-n)$ и расте за $x \in (2-n, +\infty)$. Следователно $f_{\min}(x) = f(2-n) = (1-n)^{n-1}$. Ако n – нечетно, то функцията $f(x)$ расте за $x \in (-\infty, 2-n) \cup (1, +\infty)$ и намалява за $x \in (2-n, 1)$. Следователно $f_{\min}(x) = f(1) = 0$ и $f_{\max}(x) = f(2-n) = (1-n)^{n-1}$.

Задача 2 (НСОМ-2016, група В). Дадени са точките $A(-1,-1)$ и $B(3,3)$ и окръжност $k: x^2 + (y-5)^2 = R^2$ с радиус R .

а) Да се намери R , така че правата AB да се допира до k .

б) Ако $R=1$ и точка C лежи на k , да се намери минималното лице на триъгълник ABC .

Решение.

а) Уравнението на правата AB е $y = x$. Системата

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + (y-5)^2 = 1 \end{cases}$$

трябва да има единствено решение, т.е. дискриминантата на уравнението $2x^2 - 10x + 25 - R^2 = 0$ трябва да е равна на нула, или $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

б) Лицето на триъгълник ABC е равно на

$$S(h_c) = \frac{|AB| \cdot h_c}{2} = 2\sqrt{2}h_c$$

и е минимално, когато дължината на височината h_c е минимална. Следователно точка C лежи на по-близката допирателна t към окръжността, успоредна на правата AB : $y = x$. Уравнението на t е $y = x + n$, като n намираме от условието системата

$$\begin{cases} y = x + n \\ x^2 + (y-5)^2 = 1 \end{cases}$$

да има единствено решение, т.е. $n = 5 - \sqrt{2}$. Тогава $h_c = d(AB, t) = \frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ и

$$\min S(h_c) = S\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = 2(5 - \sqrt{2})..$$

Забележка. Подточка б) може да се реши и чрез условен екстремум на функция. Ако означим $C(x_c, y_c)$, то следва да се намери минимумът на функцията $S(x_c, y_c)$ при условие $x_c^2 + (y_c - 5)^2 = 1$.

Задача 3 (НСОМ-2017, група Б). Дадена е функцията $f(x) = e^x$.

а) Да се намери уравнението на права t_1 , която е допирателна към графиката на $f(x)$ в точка с абсциса $x=0$.

б) Да се докаже, че правата $t_2: y = ex$ е допирателна към графиката на $f(x)$.

в) Да се намери лицето на фигурата, ограничена правите t_1 и t_2 , и от графиката на $f(x)$.

Решение.

а) Тъй като $f(0)=1$ и $f'(x)=e^x$, $f'(0)=1$, то t_1 има уравнение $y-1=1.(x-0)$ или $t_1: y = x+1$.

б) Равенството $e^x = ex$ е изпълнено за $x=1$ и тогава допирателната към графиката на $f(x)$ в точка с абсциса 1 е $y-e=e.(x-1)$, т.е. t_2 .

в) Ще използваме точките O , $A(1,0)$, $B(1,e)$, $C(0,1)$ и пресечната точка $D\left(\frac{1}{e-1}, \frac{e}{e-1}\right)$ на t_1 и t_2 .

Нека S_0 е лицето на криволинейния трапец $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq e^x \end{cases}$.

Тогава търсеното лице е $S = S_0 - S_{\Delta OAB} - S_{\Delta COD}$. Намираме:

$$S_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1, \quad S_{\Delta OAB} = \frac{e}{2}, \quad S_{\Delta COD} = \frac{1}{2(e-1)}.$$

$$\text{Сега } S = \frac{e^2 - 3e + 1}{2(e-1)}.$$

Задача 4 (НСОМ-2017, група В). Дадени са матриците $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ и

$$B = \begin{vmatrix} x & -2y \\ y & x \end{vmatrix}, \text{ където } x \text{ и } y \text{ са реални числа.}$$

а) Да се намери детерминантата D на матрицата $A.B$.

б) Да се докаже, че точките $M(x,y)$, за които уравнението $3D.u^2 + D.u + 3 = 0$ няма реални корени, лежат във вътрешността на елипса. Да се определят дължините на осите на елипсата.

в) Ако $x^2 + y^2 \neq 0$ и $A^{2018}.B = B^{2018}.A$, да се докаже, че $A^{2017} = B^{2017}$.

Решение.

а) За детерминантите на A и B имаме съответно $\det A = 3$ и $\det B = x^2 + 2y^2$. Следователно $D = \det A \cdot \det B = 3(x^2 + 2y^2)$.

б) Дискриминантата на уравнението $3D.u^2 + D.u + 3 = 0$ е

$$D_0 = D^2 - 36D = 9(x^2 + 2y^2)(x^2 + 2y^2 - 12).$$

Разглежданото уравнение няма реални корени, когато $D_0 < 0$. Следователно е изпълнено неравенството $x^2 + 2y^2 - 12 < 0$. Последното неравенство записваме във вида

$$\frac{x^2}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{6})^2} < 1.$$

Следователно точките $M(x, y)$ лежат във вътрешността на елипсата $\frac{x^2}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{6})^2} = 1$, полуосите a и b на която имат дължини $a = 2\sqrt{3}, b = \sqrt{6}$.

Дължините на осите ѝ са $2a = 4\sqrt{3}, 2b = 2\sqrt{6}$.

в) Равенството $A^{2018} \cdot B = B^{2018} \cdot A$ записваме във вида $A^{2017} \cdot (A \cdot B) = B^{2017} \cdot (B \cdot A)$. Тъй като $A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} x+2y & 2(x-y) \\ -(x-y) & x+2y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $A^{2017} = B^{2017}$.

Задача 5 (НСОМ-2019, група В). Дадена е матрицата $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{N}$.

- Да се намери A^3 .
- Да се намери A^n , $n \in \mathbb{N}$.
- Да се докаже, че ако ab се дели на $a+b$, то и сумата от елементите на матрицата A^{2019} се дели на $a+b$.

Решение.

а) Намираме последователно $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a(a+b) \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$ и $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a(a^2 + ab + b^2) \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$.

б) Допускаме, че $A^n = \begin{pmatrix} a^n & a \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} \cdot b^i \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.

Тогава $A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} a^{n+1} & a \cdot \sum_{i=0}^n a^{n-i} \cdot b^i \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}$. От принципа на пълната

математическа индукция следва, че допускането е вярно.

в) Сумата от елементите на матрицата A^{2019} е равна на

$$S = a^{2019} + b^{2019} + a(a^{2018} + a^{2017}b + \dots + ab^{2017} + b^{2018}) = (a+b)P + a(a^{2018} + b^{2018}) + a \cdot abQ.$$

Тъй като ab се дели на $a+b$, то $ab = R(a+b)$ и $S = (a+b)P + a(a^{2018} + b^{2018}) + a \cdot (a+b)QR = (a+b)(P + aQR) + a(a^{2018} + b^{2018})$.

Тъй като първото събираемо се дели на $a+b$, то е достатъчно да покажем, че $a^{2018} + b^{2018}$ се дели на $a+b$. От развитието на $(a+b)^{2018}$ в Нютонов бином имаме:

$$(a+b)^{2018} = a^{2018} + C_{2018}^1 a^{2017}b + C_{2018}^2 a^{2016}b^2 + \dots + C_{2018}^{2017} ab^{2017} + b^{2018}.$$

Очевидно лявата страна на равенството се дели на $a+b$. Освен това, всяко от събираемите в дясната страна, с изключение на първото и последното, също се

дели на $a+b$ (по условие ab се дели на $a+b$). Следователно и $a^{2018} + b^{2018}$ се дели на $a+b$.

Задача 6 (НСОМ-2021, група В). Дадени са функциите

$$f(x) = ax^3 - 2bx^2 + (4+c)x + d - 2 \text{ и } g(x) = x^3 - 2x^2 + ax - 2a - 3b + 1,$$

където a, b, c и d са реални параметри. Да се намерят стойностите на параметрите a, b, c и d , за които всяка от функциите има в точката $x=1$ локален минимум, равен на 5.

Решение.

От условието следва, че:

$$\begin{cases} f(1) = a - 2b + c + d - 2 = 5 \\ g(1) = -a - 3b = 5 \\ f'(1) = 3a - 4b + c + 4 = 0 \\ g'(1) = -1 + a = 0 \end{cases}.$$

Решението на системата е $a=1; b=-2; c=-15; d=13$.

Наистина, всяка от функциите $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 11$ и $g(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$ има локален минимум при $x=1$, тъй като $f'(1)=0$ и $f''(1)=12 \cdot 1 + 8 = 20 > 0$, $g'(1)=0$ и $g''(1)=12 \cdot 1 - 4 = 8 > 0$.

Задача 7 (НСОМ-2022, група В). Точка M лежи върху графиката на функцията $f(x) = 3x^3$, а точка N лежи върху графиката на функцията $g(x) = x - 2$.

а) Да се намери броят на пресечните точки на графиките на $f(x)$ и $g(x)$.

б) Да се намери минималната дължина на отсечката MN , при условие че точките M и N имат неотрицателни абсциси.

Решение.

а) Уравнението $f(x) = g(x)$ е еквивалентно на $3x^3 - x + 2 = 0$ или $(x+1)(3x^2 - 3x + 2) = 0$ с единствено решение $x = -1$. Следователно двете графики имат една пресечна точка: $(-1, -3)$.

Забележка. Броят на пресечните точки може да се определи и като се изследва функцията $F(x) = 3x^3 - x + 2$.

б) Минималната дължина на отсечката MN е равна на разстоянието от правата $g: y = x - 2$ до допирателната t към графиката на функцията $f(x)$, успоредна на g . Ъгловият коефициент на правата g е $k_g = 1$, а $f'(x) = 9x^2$. От равенството $1 = 9x^2$ и условието за неотрицателност на абсцисата на точка M намираме $x = \frac{1}{3}$, $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}$, т.е. $M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right)$ и следователно най-малката стойност на $|MN|$ е равно на разстоянието от M до правата g или

$$\min |MN| = \left| \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{9} - 2}{\sqrt{2}} \right| = \frac{8\sqrt{2}}{9}.$$

Заклучение

Казаното дотук затвърждава констатацията, че катедра „Статистика и приложна математика” продължава да работи активно с талантиливи студенти от всички специалности на Икономически университет – Варна с интереси в областта на математиката, като тяхната подготовка и участие в Националната олимпиада заемат важна част от нейната дейност. Това намира отражение както при съставяне на учебните планове по задължителните математически дисциплини, така и при съставяне на учебници и учебни помагала, като целта е нашите студенти да получат същата възможност за подготовка както техните колеги от другите висши училища. Не на последно място считаме, че традициите и успехите в това и други подобни състезания са добра мотивация за студентите да работят по-усилено в областта на математиката и средство да се преодолее отливът на желаещи да се занимават с тази наука, което ще даде положително отражение и в другите области на познанието.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Gospodinova, N., A. Angelov. (2015). Nyakoi osobenosti pri podbora i podgotovkata na studenti ot Ikonomicheski universitet - Varna za Natsionalnata studentska olimpiada po matematika. // Matematikata kato fundamentalna i prilozhna nauka : Sb. s dokl. ot mezhdunar. nauch.-prakt. konf. : Posvetena na 45 g. kat. "Prilozhna matematika". - Varna : Univ. izd. Nauka i ikonomika. - s. 409 - 417.
2. Grozdev, S., V. Nenkov. (2014). Nyakoi metodicheski podhodi za systavyane na zadachi za olimpiadi. „Matematika i informatika“, kn. 3, s. 309-316.
3. Grozdev, S., Nikolaev, R., Nenkov, V. (2017). Natsionalna studentska olimpiada po matematika. Matematika i informatika, Sofia: Az Buki, 3, s. 291 – 294.
4. Grozdev, S., Nikolaev, R., Stoilova, S., Nenkov, V. (2018). Chetirideset i peta natsionalna studentska olimpiada po matematika. Matematika i informatika, Sofia: Az Buki, 61, 3, 294 - 298.
5. Nikolaev, R., Y. Petkov. (2015). Myasto i rolya na Ikonomicheski universitet - Varna v Natsionalnata studentska olimpiada po matematika. // Matematikata kato fundamentalna i prilozhna nauka : Sb. s dokl. ot mezhdunar. nauch.-prakt. konf. : Posvetena na 45 g. kat. "Prilozhna matematika". - Varna : Univ. izd. Nauka i ikonomika. - s. 343 - 366.
6. Nikolaev, R., Y. Petkov, N. Gospodinova. (2016). Studentski matematicheski systezaniya. Izdatelstvo "MOOREA".
7. Nsom.fmi.uni-sofia.bg. (2022). [online] Available at: <<https://nsom.fmi.uni-sofia.bg/sites/default/files/images/%D0%A0%D0%95%D0%93%D0%9B%D0%90%D0%9C%D0%95%D0%9D%D0%A2%202020.pdf>> [Accessed 17 September 2022]. (1)
8. Nsom.fmi.uni-sofia.bg. (2022). [online] Available at: < <https://nsom.fmi.uni-sofia.bg/konspekt> > [Accessed 17 September 2022]. (2)
9. Yordanov, I., Gushev, V., Petkov, Y., Nikolaev, R., Grozdev, S. (2022). Natsionalna studentska olimpiada po matematika‘2022 - metodicheski resheniya na zadachite za grupa „V“. Matematika Plyus, Sofiya: Asotsiatsiya za razvitie na obrazovaniето, 30, 2, 40-47.

PROBLEMS IN TEACHING OF MATHEMATICS IN ENGINEERING SPECIALITIES AT NIKOLA VAPTSAROV NAVAL ACADEMY

Assoc. Prof. Tatyana Madzharova, PhD

Department Mechatronics, Nikola Vaptsarov Naval Academy, Bulgaria

Abstract: The article analyzes the problems in teaching of mathematics of the students and cadets from the computer and marine engineering specialties. The usefulness of mathematics for the formation of professional competences in these specialties and its importance for the future professional career of the trainees are indicated. The experience of the teachers and the difficulties they had to overcome is shared. There are given some recommendations for improving the teaching process in order to increase the motivation and effectiveness of mathematics education.

Keywords: Professional competences; Teaching of mathematics; Experiens

JEL code: I21, I23

ПРОБЛЕМИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА В ИНЖЕНЕРНИТЕ СПЕЦИАЛНОСТИ ВЪВ ВВМУ „Н. Й. ВАПЦАРОВ“

Доц. д-р Татяна Маджарова

Катедра Мехатроника, ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“, България

Въведение

Морската индустрия бележи ръст в последните години. Увеличава се броят на корабите. Тази тенденция се потвърждава от дългосрочните прогнози за развитието на този сектор. Този факт води до необходимостта от повече висококвалифицирани кадри, а следователно и от качествено морско образование.

Основна цел на обучението на морски специалисти е придобиването на социална и професионална компетентност, способност да управляват съвременни технологични средства и хора, да се ориентират във всякакви, включително екстремни, ситуации и да вземат правилните ефективни решения. Образователната институция трябва да осигури условия за формиране на личност с висока обща култура, фундаментална професионална подготовка, готовност за самостоятелно овладяване на нови знания и овладяване на ново оборудване и технологии в процеса на обучение.

Корабният механик и електромеханик трябва да бъде еднакво квалифициран за решаване на практически проблеми, свързани с различни видове дейности – корабоплаване и риболов, техническа експлоатация на кораба и търговско-икономически и правни дейности. Когато корабът е в морето, проблемите трябва да бъдат решени от морския специалист, тъй като там всеки отговаря за определени видове дейности и е невъзможно да се получи квалифицирана помощ отвън. Следователно морските специалисти трябва да имат добра методическа подготовка, която изисква развитие на аналитично

мислене, използване на знания по различни теми и търсене на ефективни начини за решаване на тези проблеми.

Математиката има голям принос за развитието на аналитичното мислене и осигурява фундаменталната подготовка за изучаването на инженерните дисциплини. Затова е залегнала в учебните планове на всички технически университети (Grigoryeva, 2009).

1. Проблеми в обучението по математика

Слаба подготовка по математика от средното училище на преобладаващата част от студенти и курсанти

Основният проблем, с който се сблъскваме още в началото, е слабата подготовка по математика и липса на желание за учене на новоприетите студенти и курсанти от средните училища. Още в училище, а след това и в университета обучаемите не осъзнават значението на математиката за потенциалната им професионална кариера. Учениците, които избера да не приемат математиката на сериозно или да я игнорират в гимназията и университета, губят много бъдещи възможности за кариера. Те по същество обръщат гръб на повече от половината пазар на труда (Акакро, 2016).

Навлизането на информационните технологии в икономиката и бита на хората доведе до появата на нови професии, които са по – предпочитани и добре заплатени на пазара на труда. Морските професии вече не са така атрактивни и желани от младите хора. Така в последните години във Висшето военноморско училище „Н. Й. Вапцаров“ се приемат за студенти кандидати с по – нисък бал. При това единици от кандидатите са избрали да се явят на матура по математика. Повечето от приетите студенти имат съществени пропуски от средното училище и срещат трудности при обучението си по тази дисциплина.

Липса на гравитни контакти със средните училища

Контактите между ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“ и средните училища се свеждат до кандидатстудентските кампании, на които учениците се запознават със специалностите и възможностите за професионална реализация. Има средни училища, в които учениците традиционно избират да продължат образованието си във ВВМУ. Организирането на подготвителни курсове от преподаватели по математика във ВВМУ ще бъде полезно за кандидатстващите. Така преходът от средното към висшето училище ще бъде по – лесен и проблемите с обучението им по математика в голяма степен ще се решат (Dishlieva, 2014).

Липса на мотивация за изучаване на математиката в инженерните специалности

Математическите дисциплини се изучават в първи и втори курс, т.е. в началото на тяхното обучение. Все още те нямат представа от специалността, която са избрали и важността на математиката за инженерните дисциплини, които им предстои да изучават. Голяма част от тях смятат, че изучаването на математиката е ненужно. Често пъти те задават въпроса „За какво ми трябва да уча математика? На кораба аз няма да решавам интеграли“. Липсата на мотивация за учене е изключително важен проблем, с който се сблъскваме. В първи и втори курс те все още не изучават специални дисциплини и е трудно да им се дадат примери от специалността, за да се мотивират. Възможността да преминат по –

нагоре с невзети изпити по математика е причина много от тях изобщо да не се явяват на изпит или да се явят, но без да влагат усилия да се подготвят.

В специалностите Информационни и комуникационни технологии и Киберсигурност, където по учебен план се започва с изучаването на специални дисциплини и студентите и курсантите са приети с по – висок бал не се наблюдава такава тенденция. Там причините за трудността при усвояването на математическите знания са единствено поради натрупани пропуски в обучението им в средното училище.

Намаляване на хорариума часове по математика

Изискванията на Международната морска организация (ИМО) наложиха да се включат в учебните планове на бъдещите корабни механици и електромеханици редица дисциплини, които са важни за бъдещата им професионална подготовка. Това наложи да се намали хорариумът по фундаменталните дисциплини, в това число и на математиката. В същото време преподавателите по инженерните дисциплини настояват да се запази изучаваният материал в почти същия обем. Така учебният материал в лекциите беше реструктуриран – отпаднаха доказателствата на теореми и някои примери, които спомагаха да се изясни преподаваният материал и да се направи връзка с инженерните дисциплини, които използват този математически апарат. Слабата подготовка от средното училище и намаленият брой практически занятия във ВВМУ създават за някои от студентите непреодолими трудности при подготовката им за изпити по математическите дисциплини.

Липса на контакти между преподавателите от катедрата и колегите от профилиращите катедри

Преподавателите по математика в катедра Мехатроника са висококвалифицирани – с много добра научна и методическа подготовка. Те са професионалисти в областта на математиката, но не са достатъчно компетентни в морските науки. В учебната литература по математика много рядко се намират подходящи примери от инженерните дисциплини. Засилването на контактите с колеги от профилиращите катедри би било от полза както за обучението по математика на бъдещите механици и електромеханици, така и за обучението по инженерните дисциплини.

2. Препоръки за повишаване на ефективността на обучението по математика

Задълбочаването на връзките със средните училища с организирането на курсове и оказване на методическа помощ на учителите ще повиши подготвеността на бъдещите студенти и курсанти за усвояването на математиката в курсовете във ВВМУ.

При обучението по математика се използват традиционните за тази образователна степен методи – лекции, практически занятия, контролни работи и самостоятелна работа на студентите и курсантите.

Наред с дефинирането на математическите понятия и формулирането на основните твърдения на лекциите по математика студентите получават представа за историческото развитие на математическите науки, за задачите, поставени им от естествените науки за разрешаване, за връзката на математиката с практиката,

за неизбежността на развитието ѝ и много други. За да се постигнат тези цели се стремим да поставим студентите в активна позиция. Проблемното изложение на учебния материал позволява да се повиши познавателния интерес и активността на обучаемите.

Използването на информационните технологии по време на лекцията ще спести време, ще даде възможност за онагледяване на математическите понятия и теореми, ще подпомогне студентите и курсантите в усвояването на преподавания материал и ще повиши мотивацията им.

Дейността на морския специалист има колективен характер. Следователно, формирането на такива лични качества като способност за общуване (бизнес комуникация), зачитане на мнението на другите, подчиняване на техните интереси на интересите на екипа, отговорност за обща кауза, способността да влезеш в позицията на друг и да разбереш начина му на мислене, способността да защитиш своята гледна точка и т.н. е от особено значение за развитието на професионалната компетентност на морския специалист. Всички тези качества се постигат в резултат на колективно решаване на образователни проблеми в практическите занятия. По време на практическите занятия протича активен процес на формиране на специалисти. Знанията, получени в лекционния курс, се задълбочават и разширяват, теорията се свързва с практиката и приложенията към други науки. Стабилното и съзнателно усвояване на теорията е невъзможно без решаване на задачи и упражнения, които използват понятията и теоремите, представени в лекционния курс. По време на практическите занятия студентите работят самостоятелно или на дъската. Решенията на поставените задачи се обсъждат, предлагат се различни варианти за решение, посочва се кое от тях е рационално. Така те се научават да изразяват решението на компетентен математически език, научават се да следват логиката на разсъждение, посочват се често допускани грешки (Gudelj, 2021).

За да се контролира нивото на усвояване на материала и да се повиши ефективността на обучението в практическите занятия в програмите по математическите дисциплини са предвидени контролни работи. Резултатите от тях се вземат при формиране на изпитната оценка. Преди всяка контролна работа на студентите и курсантите се възлагат индивидуални задачи за самостоятелна работа. Отговорното изпълнение на възложените задачи за самостоятелна работа е предпоставка за успешно постигане на целите на обучението по математика. Ролята на самостоятелната работа при формирането на професионалната компетентност на бъдещия морски специалист е изключително голяма.

От първостепенно значение за ефективността на обучението е засилването на градивните контакти между преподавател и обучаем. Регулярно провежданите консултации със студенти и курсанти дават възможност на преподавателя да установи и попълни някои пропуски в знанията им и да ги подпомогне в усвояването на математическото съдържание. Създаването на служебни мейли на студенти, курсанти и преподаватели в периода на противоепидемичната обстановка в страната даде възможност за по-тесни контакти между преподавател и обучаеми. Студентите задават въпроси, търсят помощ от преподавателя, получават от него допълнителни материали за подготовката си.

В своята работа преподавателят трябва да работи за повишаване на ангажираността на студентите в процеса на обучение.

Усилията на преподавателите са насочени главно към овладяването на учебното съдържание от слабите студенти. Те са основната маса и проблемите, свързани с ефективността на обучението по математика са свързани главно с тях. Необходимо е във всяка студентска група и всяко класно отделение от курсанти да се създаде едно ядро от знаещи студенти. Студентските олимпиади по математика и компютърна математика се една такава форма. Те засилват интереса на студентите и курсантите към математиката. Опитът показва, че студентите и курсантите, които успешно се представят на тези олимпиади, продължават да разширяват своите знания, включват се в проекти по астрономия на Европейската космическа агенция и НАСА, където също заемат призови места. Тяхното представяне мотивира и други техни колеги да разработват реферати, да участват в проекти, в студентски научни сесии и др.

Едно изследване на удовлетвореността от обучението по математика в морските университети в Хърватия, Латвия, Естония и Полша показва, че преподавателите са недоволни от резултатите на студентите на изпитите по математика и от основните знания на студентите, придобити в гимназията. Те предлагат за решаване на този проблем в университетите да бъде включен допълнителен курс по начална математика за студенти с ниско ниво на основни знания, придобити в гимназията.

Резултатите от проучването също показват, че преподавателите използват предимно традиционни методи и инструменти като бяла дъска и маркери, заедно с презентации на Power Point в процеса на преподаване. Тези методи все още издържат, но не са толкова привлекателни за днешните студенти. Преподавателите доста рядко използват ИТ инструменти като уеб страници, тестове и онлайн тестове, видеоклипове, анимации и математически компютърни програми. Много студенти оценяват използваните от преподавателите методи като неподходящи и безинтересни. Преподавателите също рядко свързват теорията и решаването на математически задачи с реални проблеми. Следователно студентите не разбират, че математиката е не само теория, формули, теореми и т.н., но и способността за решаване на реални проблеми.

Проблемите и трудностите в преподаването на математическите дисциплини в инженерните специалности на ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“ са идентични с тези на колегите от морските университети в Хърватия, Латвия, Естония и Полша (Gudelj, 2021).

Заклучение

В настоящето преподавателите са изправени пред големи предизвикателства – от една страна студентите и курсантите постъпват със слаба подготовка и липса на навици за учене, а от друга страна морският бизнес има нужда от все по-квалифицирани кадри, с добра инженерна подготовка и познания за работа с високите технологии на съвременните кораби. Трябва да се търсят иновативни подходи в обучението, за да се провокира интересът на обучаемите за овладяване на математическите знания.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Akakpo, G. (2016). The role and relevance of mathematics in the maritime industry, *African Journal of Educational Studies in Mathematics and Sciences*, Vol. 12, pp. 75-86.
2. Dishlieva, K. (2014). Nyakoi prichini za niskiya uspeh po matematika v tehnikeskite universiteti I predlozheniya za tyahnoto preodolyavane, *Journal of Science and Education Policy*, Vol.8, Number 1, pp. 192-215.
3. Grigoryeva, E. (2009). Formirovanie profesionalno vazhnykh kachestv morskikh inzhenerov pri obuchenii po matematike, Astrahan: Avtoreferat.
4. Gudelj, A., et al. (2021). Survey of maritime student satisfaction: a case study on the international student survey to identify the satisfaction of students in mathematical courses, *Pedagogika – Pedagogy*, Vol. 93, Number 6s, pp. 9-23.

IMPORTANCE OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS TRAINING WHEN STUDYING QUANTITATIVE METHODS IN LOGISTICS

Assoc. Prof. Tanka Milkova, PhD
University of Economics – Varna , Bulgaria

Abstract: *Mathematics training in the foundation of higher education in economics is essential in view of this, to create prerequisites for the possibility of learning and skills for the handling of students, with different concepts and methods from the special and specialized disciplines in each specialty. This report will address several key elements of the Applied Mathematics curriculum that are directly related to some of the models and methods being studied under Quantitative Methods in Logistics and which, without fundamental mathematics preparation, will not be absorbed by students at the required level.*

Keywords: *Mathematics; Quantitative methods; Logistics; Training*

JEL code: *C02*

ЗНАЧЕНИЕ НА ФУНДАМЕНТАЛНАТА ПОДГОТОВКА ПО МАТЕМАТИКА ПРИ ИЗУЧАВАНЕ НА КОЛИЧЕСТВЕНИ МЕТОДИ В ЛОГИСТИКАТА

Доц. д-р Танка Милкова
Икономически университет – Варна, България

Обучението по различните фундаментални дисциплини е от съществено значение за осигуряването на качествено висше образование. В зависимост от същността на изучаваната специалност са необходими различни фундаментални познания, но те винаги следва да са подбрани и организирани в различни дисциплини така, че да осигуряват необходимите познания на студентите, които да им позволят да изучават специалните дисциплини на необходимото високо ниво. Изучаването в дълбочина на специалните дисциплини и възможността да бъдат осъзнати смисъла и логиката на процесите е необходимо за изграждането на добре подготвени и адаптивни специалисти във всяко едно направление (Николаев и Станчева, 2015 (1); Николаев и Станчева, 2015 (2); Николаев и Станчева, 2014; Николаев, Ангелов и Йорданов, 2014; Николаев и Господинова, 2014; Николаев и Господинова, 2013; Николаев, 2011; Николаев и Каракулаков, 2007). Вниманието ни в настоящия доклад ще бъде насочено към фундаменталната дисциплината Приложна математика (Николаев и кол., 2021), която се изучава във фундамента на всички специалности от областта на висше образование „Социални, стопански и правни науки“ в Икономически университет – Варна. Ще бъде разгледано значението на тази фундаментална дисциплина за успешното усвояване на специалните знания по дисциплината Количествени методи в логистиката, изучавани от студентите в специалност Логистика.

Целта на автора в настоящия доклад е да покаже връзката между фундаменталната дисциплина Приложна математика и специалната дисциплина Количествени методи в логистиката, изучавана от студентите в специалност

Логистика в Икономически университет – Варна. За постигане на тази цел ще бъдат разгледани някои конкретни количествени модели и методи в логистиката и ще бъде показано, че за тяхното успешно усвояване и прилагане с разбиране са необходими различни познания от фундаменталната дисциплина Приложна математика.

Моделите и методите от количествените методи в логистиката, както и използваният в тях математически апарат няма да бъдат описвани детайлно, а по-скоро от гледна точка на това, да се изясни връзката между тях и значението на познаването на математическия апарат за доброто възприемане и разбиране на количествените модели и методи.

Първо ще разгледаме един от основните модели в областта на количествените методи в логистиката¹, а именно задачата на линейното оптимизиране и нейното приложение за конструиране на оптимална производствена програма (Атанасов и Милкова, 2011). С илюстративна цел тук ще представим един конкретен пример за определяне на оптимална производствена програма при производство на два продукта с използване на четири ресурса. Ще отбележим само, че задачата за съставяне на оптимална производствена програма може да се обобщи за случая на производство на n вида продукти с използване на m вида ресурси.

Пример. За производство на два вида продукта P_1 и P_2 се използват четири вида ресурси R_1 , R_2 , R_3 и R_4 . Наличностите от ресурси, количеството единици ресурси, изразходвано за производството на единица от всеки продукт, са дадени в таблица 1 (стойностите са условни).

Таблица 1

Видове ресурси, наличности, разходни норми

Видове ресурси	Наличности	Разходни норми за единица продукт	
		P_1	P_2
R_1	14	2	1
R_2	16	1	2
R_3	15	3	–
R_4	21	–	3

Източник: Съставена от автора

Печалбата от реализацията на единица продукт от вида P_1 и P_2 е съответно, 2 лв. и 3 лв. Необходимо е да се състави план за производство на продуктите P_1 и P_2 , при който печалбата от тяхната реализация ще бъде максимална.

Трябва да подчертаем, че за построяването на икономико-математическия модел на задачата са много важни и необходими познания от аналитичната геометрия и умението да се използват възможностите на аналитичната геометрия за моделиране на икономически явления и процеси.

На първо място за да се състави икономико-математическия модел се въвеждат променливите x_1 и x_2 , които ще изразяват броя единици продукти

¹ Този модел се преподава и по дисциплината Количествени методи в управлението пред студенти от специалност Мениджмънт в Икономически университет – Варна.

съответно от вида P_1 и P_2 , които трябва да бъдат планирани за производство. Следва да се моделират и ограничителните условия на задачата. За производство на тези продукти се използват $(2x_1 + x_2)$ единици ресурси от вида R_1 , $(x_1 + 2x_2)$ единици от вида R_2 , $3x_1$ единици ресурси от вида R_3 и $3x_2$ единици ресурси от вида R_4 . Тъй като тези ресурси са в ограничено количество – съответно 14, 16, 15 и 21 единици, то връзката между използването на ресурсите и техните наличности се определя посредством системата неравенства

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 14, \\ x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ 3x_1 \leq 15, \\ 3x_2 \leq 21. \end{cases} \quad (1)$$

По смисъла на самата задача за променливите е в сила условието

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (2)$$

Сумарната печалба Z се формира от $2x_1$ лв. от реализацията на продукта P_1 и $3x_2$ лв. – от реализацията на продукта P_2 , т.е.

$$Z = 2x_1 + 3x_2, \quad (3)$$

което на практика е целевата функция в модела, т.е. линейната форма, на която следва да се търси максимумът.

По този начин се достига до линейния икономико-математически модел на задачата с целева функция (3) и ограничителни условия (1) и (2). Целта е да се определят такива стойности на променливите x_1 и x_2 (в общия случай n на брой променливи), които максимизират линейната форма (3) и в същото време удовлетворяват условия (1) и (2).

Тук са от съществено значение знанията за системи линейни уравнения и неравенства, за да може да се осъзнае смисълът на понятието допустим план (решение, програма, стратегия) на задачата, а именно съвкупността от числени стойности на неизвестните величини x_1 и x_2 (в общия случай n на брой), които удовлетворяват системата от ограничителни условия. Допустим план, за който целевата функция приема екстремалната си стойност, се нарича оптимален.

Аналитичната геометрия е в основата и на алгоритъма за определяне на оптимален план на задачата. Този алгоритъм се нарича графичен метод и позволява представяне на всички закономерности на модела в правоъгълната координатна система, което позволява да бъде нагледно осмислен и напълно осъзнато значението на оптималното решение. Графичният метод се реализира чрез следните стъпки:

а) построява се областта на решение на дадената система линейни неравенства;

1. Областта на решение на неравенство от вида $a_1x_1 + a_2x_2 \leq a_0$ ($a_1x_1 + a_2x_2 \geq a_0$), където $a_0 > 0$, е полуравнината, съдържаща (несъдържаща) началото на координатната система, определена от граничната права $a_1x_1 + a_2x_2 = a_0$, включително точките от тази права.

2. Областта на решение на неравенство от вида $a_1x_1 + a_2x_2 \leq 0$ ($a_1x_1 + a_2x_2 \geq 0$) се определя по следния начин: граничната права на неравенството ($l: a_1x_1 + a_2x_2 = 0$) минава през началото на координатната система; ако координатите на произволна точка (например, $M(1;0)$) от едната полуравнина, определена от правата l , удовлетворява неравенството $a_1x_1 + a_2x_2 < 0$ ($a_1x_1 + a_2x_2 > 0$), неговата област е полуравнината, в която лежи тази точка; ако тези координати не удовлетворяват неравенството, неговата област на решение е другата полуравнина, определена от правата l , включително и точките от тази права.

3. Областта на решение на дадена система линейни неравенства с две неизвестни е общата част на полуравнините, определящи областите на решение на съставлящите я неравенства.

4. Областите на решение на дадена система линейни неравенства с n неизвестни ($n \geq 3$) е общата част на полупространствата, представляващи областите на решение на съставлящите я неравенства.

б) построява се множеството от точки, чиито координати анулират линейната форма, т.е. лежат на правата $l: c_1x_1 + c_2x_2 = 0$;

в) построява се вектор $\vec{c}(c_1, c_2)$ показващ посоката на растене на Z (векторът $\vec{c}(c_1, c_2)$ е перпендикулярен на правата l);

г) придвижва се правата l успоредна сама на себе си, докато срещне точка от областта на решенията:

– ако това придвижване е станало по посока на вектора $\vec{c}$, функцията достига своя минимум в тази точка;

– ако това придвижване е станало в посока, обратна на посоката на вектора $\vec{c}$, функцията достига своя максимум в тази точка;

д) ако X_1^* е последната точка, която среща правата l от областта при успоредното придвижване по посока на вектора $\vec{c}$, то в точката X_1^* линейната форма достига своя максимум;

е) ако X_2^* е първата точка, която среща правата l от областта при успоредното придвижване по посока на вектора $\vec{c}$, то в точката X_2^* линейната форма достига своя минимум;

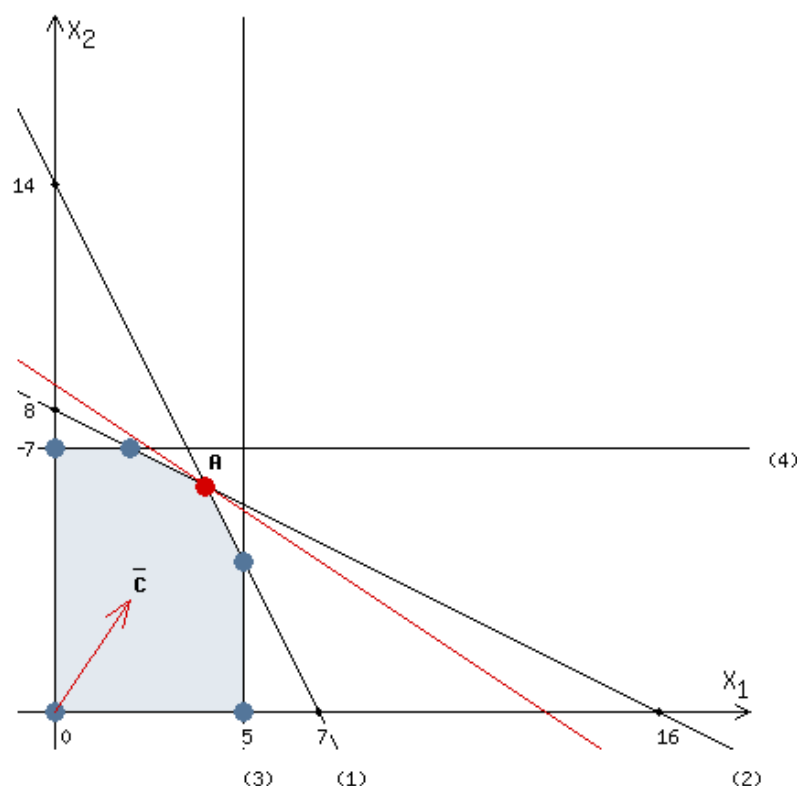
ж) ако при това придвижване на правата l по посока на вектора $\vec{c}$ тя съвпада с някои от граничните прави, то линейната форма приема екстремалната си стойност за всички точки от областта на решенията, които са изпъкнала линейна комбинация на кои да са две точки от тази област;

з) намират се координатите на точките, в които Z достига своята екстремална стойност. Заместват се x_1 и x_2 в Z с получените стойности за x_1 и x_2 .

и) ако при придвижване на правата l по посока на вектора $\vec{c}$ не се достига крайна точка, то задачата няма решение поради неограниченост на целевата функция. Същото важи и при придвижване по посока на вектора $-\vec{c}$.

Прилагайки този алгоритъм е намерено решението на представения по-горе пример. Графично решението е изобразено на фиг. 1. Оптималният план на

задачата е $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ и $Z = 26$, което означава, че от първия продукт трябва да се произведат 4 единици, от втория продукт трябва да се произведат 6 единици, а това ще осигури максималната възможна печалба от 26 единици.



Фиг. 1. Графично решение на задачата за оптимална производствена програма
Източник: Съставена от автора

Разбирането на фундаменталния математически апарат на аналитичната геометрия позволява прилагане на методите на линейното оптимиране с цел определяне на оптимална производствена програма, разбиране и правилно осмисляне на решението, както и дава възможност за модифициране и адаптиране на моделите за всякакви специфични особености на конкретния икономически проблем.

На следващо място ще акцентиране на значението от познанията за функция на една и на повече променливи и умението да се конструират и изследват функции. Умението за свободно боравене с този математически апарат е от съществено значение при изучаване на един от фундаменталните в количествените методи в логистиката модел за управление на запасите при детерминирано търсене, известен като формула на Уилсън (Атанасов и Дочев, 2005; Дыбская и кол., 2008; Стерлигова, 2012). Формулата на Уилсън първоначално е разработена в два варианта, когато не се допуска и когато се допуска недостиг на запаси. Основната идея се свежда до това да се конструира функция, която отчита всички основни разходи за управление на запасите. Доказва се, че тази функция има минимум и с помощта на математическия апарат се определя оптималната стойност на размера на една доставка от запаса, която

осигурява минимума на общите разходи. Накратко този модел може да се представи по следния начин:

1) Формула на Уилсън, когато не се допуска недостиг от запаса.

Нека някаква фирма съгласно договорни задължения трябва да предостави на свои клиенти R единици изделия равномерно за период от време T . Фирмата трябва да реши какъв ще бъде интервалът за изпълнението на поредните доставки и техният обем. Доставките се правят през равни интервали от време, всички доставки трябва да са с еднакъв обем и запасът се изразходва равномерно през периода между две доставки. За решаването на поставения проблем се въвеждат означенията:

q – обем на доставката;

c_q – разходи за организиране на една доставка;

c_r – разходи, свързани със съхранението на единица изделие в продължение на единица време;

t – интервал от време между две поредни заявки;

n – брой на доставките, които ще бъдат направени през периода T .

Тогава $n = \frac{R}{q}$, а $t = \frac{T}{n} = \frac{Tq}{R}$.

Приема се, че интервалът от време t има за начало момента, когато в склада на фирмата има q изделия, и край – при отсъствие на запас в склада. Тогава $\frac{q}{2}$ е средното ниво на запаса, тъй като след получаването на поредната заявка запасът намалява равномерно до пълно изчерпване. Следователно разходите за съхранение на запаса за периода t ще бъдат $\frac{c_r}{2R}Tq^2$. Разходите за една доставка

изделия са равни на $\frac{c_r}{2R}Tq^2 + c_q$. За определянето на общите разходи за време T ще трябва разходите за една доставка да се умножат по техния брой и така се достига до функцията

$$S = \left(\frac{c_r}{2R}Tq^2 + c_q \right) \frac{R}{q} = \frac{c_r}{2}Tq + \frac{c_q R}{q}, \quad (4)$$

която представлява функция на една променлива, а именно променливата q , изразяваща обема на една доставка. Първото събираемо в дясната страна на (4) нараства с увеличението на обема на доставката, а второто събираемо – намалява. Това означава, че функцията на общите разходи S има минимум и следва да се определи при какъв обем на една доставка ще се получи той.

За да бъде правилно разбран смисълът на този модел, начинът на конструиране на функцията на общите разходи и значението на определяне на нейния минимум е необходимо студентите да са добре запознати с теоретичните математически постановки за функция на една променлива. Още по-съществено е да са запознати с понятието производна и приложението му при изследване на функция и определяне на нейните екстремуми. За да се определи минимумът на функцията S трябва да се диференцира (4) спрямо q и да се приравни на нула (необходимо условие за съществуване на екстремум) $\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{c_r}{2}T - \frac{c_q R}{q^2} = 0$. Оттук се

определя, че $q^* = \sqrt{\frac{2c_q R}{c_r T}}$, т.е. за така намерената стойност q^* функцията S има минимум, тъй като $\frac{\partial^2 S}{\partial q^2} = \frac{2c_q R}{q^3} > 0$ (т.е. втората производна е по-голяма от нула).

След определяне на оптималната стойност q^* се определят и оптимални стойности за брой доставки, интервал от време между доставките, минимум на общите разходи или изработка се цялостна стратегия за управление на запаса. В много случаи се налага този модел да бъде модифициран и адаптиран, за да бъде адекватен на конкретната ситуация, което налага студентите да познават добре математическия апарат, за да могат самостоятелно да решат един реален практически проблем от този характер.

2) Формула на Уилсън, когато се допуска недостиг от запаса.

В този случай се предполага, че част от потребностите не се задоволяват своевременно, а се отлагат. Удовлетворяването на потребностите се осъществява в момента на получаване на следващата заявка. Естествено това отлагане е свързано с разходи, които са пропорционални на обема на тази част от потребностите. Въвежда се нов параметър c_u , изразяващ разходите от отлагане на задоволяването на потребителите с единица изделия за единица време. Интервалът от време между две доставки се разделя на две части, първата се отнася за времето през което има запас, а втората се отнася за времето през което липсва запас. Предвид това, че при постъпване на поредната доставка част от нея се потребява незабавно, то максималният размер на запаса във всеки един момент е по-малък от q и се означава с променлива s . След осъществяване на поредица от аналогични разсъждения отново се конструира функция на общите разходи за управление на запаси, която обаче е функция на две променливи, а именно q и s . Тази функция има вида

$$S(q, s) = \frac{c_r T s^2}{2q} + \frac{c_q R}{q} + \frac{(q-s)^2}{2q} c_u T. \quad (5)$$

Отново възниква потребност от умения за боравене с математическия апарат, за да може да се осъзнае и с разбиране да се приложи методът за търсене на локални екстремуми на функция на две променливи. Този метод е свързан с намиране на първите частни производни спрямо q и s на функцията $S(q, s)$ и тяхното правяване на нула:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial q} = -\frac{s^2}{2q^2} c_r T + \frac{sq-s^2}{q^2} c_u T - \frac{c_q R}{q^2} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial s} = \frac{c_r T s}{q} - \frac{(q-s)}{q} c_u T = 0. \end{cases}$$

След решаване на системата и доказване, че функцията има минимум се определя, че минималните общи разходи за управление на запаси в този случай ще се получат при размер на една доставка $q^* = \sqrt{\frac{2c_q R}{c_r T}} \cdot \sqrt{\frac{c_r + c_u}{c_u}}$ и тогава

$s^* = \sqrt{\frac{2c_q R}{c_r T}} \cdot \sqrt{\frac{c_u}{c_r + c_u}}$. Отново следва да се определи цялостна оптимална стратегия за управление на запасите.

Тук отново трябва да подчертаем, че познаването на математическия апарат е наложително, за да може да бъде осъзната логиката на построяване на функцията на общите разходи, нейният смисъл и съдържание на отделните разходни компоненти, както и за да могат да се правят модификации, подходящи за конкретни практически ситуации.

На последно място в настоящата разработка, но не последно въобще и не последно по важност, ще се спрем на значението на теория на вероятностите и случайни величини, заложили във фундаменталната подготовка по Приложна математика, за усвояване на още един модел от количествените методи в логистиката приложим при управление на запасите при случайно търсене (Атанасов и Дочев, 2005). От самото наименование на модела проличава, че той е приложим при наличие на случайни процеси. Известно е, че случайни процеси се моделират и управляват с помощта на елементи от теорията на вероятностите и математическата статистика.

Моделът за управление на запасите при случайно търсене има следната постановка. Предполага се, че фирмата трябва да закупи някакъв вид оборудване. Една от основните резервни части на оборудването е специфична и скъпоструваща, и се налага заедно с основното оборудване да се поръчат и няколко бройки от тази резервна част. Ако се закупят повече бройки, то излишните не се използват или се продават на много ниски цени, което води до загуби. Ако тази резервна част липсва, то се налага извънредното ѝ доставяне, но вече на значително по-висока от първоначалната цена. Означава се с s големината на запаса. Предполага се, че търсенето q за интервала от време T е случайна величина, с известен закон на разпределение $P(q)$ на вероятностите:

q	0	1	2	...	s	...	N
$P(q)$	$P(0)$	$P(1)$	$P(2)$	...	$P(s)$	...	$P(n)$

Възможни са два случая:

1. Търсенето q е по-малко или равно на нивото на запаса, т.е. $q \leq s$. Запасът покрива търсенето и $s - q$ бройки ще носят загуби поради излишък c_1 за една единица от тази резервна част.

2. Търсенето q е по-голямо от нивото на запаса, т.е. $q > s$. В този случай възниква необходимост от извънредно попълване на запаса от $q - s$ единици, което води до допълнителни разходи (поради недостиг) от c_2 за една единица от запаса.

Предварително не е известно търсенето q , но се знае разпределението на вероятностите $P(q)$. Тези вероятности се определят на база статистика за вече минали периоди, където пък се налага владенето на статистически методи. За да се намерят очакваните разходи при дадено ниво на запаса s , трябва да се съберат стойностите на разходите за всяко q , умножени по съответните вероятности $P(q)$. Така се получава функцията на общите разходи, която зависи от размера на запаса, т.е. от променливата s :

$$Q(s) = c_1 \sum_{q=0}^s (s-q) P(q) + c_2 \sum_{q=s+1}^n (q-s) P(q).$$

Очевидно е, че за да се моделира поставеният проблем и да се конструира правилно функцията на общите разходи $Q(s)$ са необходими известни познания за вероятности и случайни величини. Елементи от теория на вероятностите се използват и за да се определи минимумът на тази функция. Прилага се специален алгоритъм, който тук няма да бъде изложен, единствено ще споменем, че оптималното равнище на запаса s^* се получава при изпълнение на двойното неравенство

$$P(q \leq s^* - 1) < \frac{c_2}{c_1 + c_2} < P(q \leq s^*),$$

където $P(q \leq s)$ представлява вероятността действителното търсене да е по-малко или равно на нивото на запаса.

В заключение можем да кажем, че в никакъв случай не отричаме използването в практиката на готови решения – наготово изведени формули, алгоритми и програмни продукти. Придържаме се обаче към твърдението, че използването на готови решения, без те да се разбират, не винаги води до желаните резултати, дори напротив, в много случаи това може да навреди и да доведе до излишни загуби и разходи при разработване на различни стратегии за осъществяване на логистични дейности.

В редица случаи се налага въвеждане на допълнителни условия и ограничения, свързани с конкретния проблем, което изисква умения това да бъде направено и знания за боравене с методи за решаване на модифицирания модел. Основно знанията и уменията са насочени в две посоки:

- 1) конструиране на икономико-математически модел;
- 2) владение на методи за неговото решаване.

Особено справянето с второто, без владение на фундаментални знания по математика, е невъзможно.

Представените в доклада примери имат само илюстративен характер и могат да бъдат дадени много други подобни примери, които доказват същественото значение на фундаменталното обучение по математика за изграждането на добри специалисти в областта на икономиката. Специалисти, които могат да прилагат научно-обосновани модели и методи за постигане на оптимални резултати в различни насоки, в това число и при реалното практическо осъществяване на широкия спектър от логистични дейности.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Atanasov, B., D. Dochev. (2005) *Izsledvane na operatsiite*. Varna: Nauka i ikonomika.
2. Atanasov, B., T. Milkova. (2011) *Kolichestveni metodi v logistikata (rykovodstvo)*. Varna: Nauka i ikonomika.
3. Duybskaya, V. V. i kol. (2008). *Logistika. Integratsia i optimizatsia logisticheskikh biznes-protsesov v tsepyah postavok*. Moskva: Эkсмо.

4. Nikolaev, R., Suruzhon, D., Stoyanov, T., Zapryanova, T., Milkova, T., Miryanov, R. (2021) *Prilozhna matematika*. Varna: Nauka i ikonomika.
5. Nikolaev, R., V. Stancheva. (2015) *Novata ikonomicheska realnost i matematicheskoto modelirane: vazmozhnosti i predizvikatelstva*. // Sb. s dokladi ot mezhdunarodna nauchna konferentsia „Ikonomikata v promenyashtia se svyat: natsionalni, regionalni, i globalni izmerenia“, IU – Varna, Tom II. Varna: Nauka i ikonomika, s. 457 – 464. (1)
6. Nikolaev, R., V. Stancheva. (2015) *Biznes kazusi pri obuchenieto po statistika: na primera na zadachi s otnositelni velichini*. // Aktualni problemi na naukata, obrazovaniето i realizatsiyata v oblastta na prilozhnata statistika i informatika. Sofia: Izdatelski kompleks – UNSS, s. 48 – 54. (2)
7. Nikolaev, R., V. Stancheva. (2014) *Problemi i perspektivi pred obuchenieto po matematika v OKS „Magistar“ v Ikonomicheski universitet – Varna i vrazkata mu s praktikata*. // Sbornik s dokladi ot kragla masa s mezhdunarodno uchastie „Magistarskoto obuchenie – problemi i vizia za badeshteto“, Varna: IK – Gea Print, s. 98 – 107.
8. Nikolaev, R., E. Angelov, S. Yordanov. (2014) *Matematikata – „aktiv“ ili „pasiv“ za studentite po ikonomika*. // Sbornik s dokladi ot nauchna konferentsia „Problemi pri obuchenieto po schetovodstvo, analiz i kontrol“. Varna: Nauka i ikonomika, s. 139 – 148.
9. Nikolaev, R., N. Gospodinova. (2014) *Prilozhenie na matematicheskia aparat pri razrabotvane na algoritmi*. // Sb. s dokladi ot mezhdunarodna nauchna konferentsia „Informatsionnite tehnologii v biznesa i obrazovanenieto“. Varna: Nauka i ikonomika, s. 403 – 410.
10. Nikolaev, R., N. Gospodinova. (2013) *Matematikata – ot abstraktsiyata kam realnostta*. // „Sotsialnite nauki i globalizatsiyata“: Sb. s dokladi ot mezhdunarodna nauchna konferentsia posvetena na 65-godishninata ot sazdavane na katedra „Filosofski nauki“. Varna: Nauka i ikonomika, s. 121 – 127.
11. Nikolaev R. (2011) *Nivo na kompetentnost na studentite po ikonomika pri prilagane na kolichestveni metodi za reshavane na prakticheski zadachi*. sb. Dokladi, „Stroitelno predpriemachestvo i nedvizhima sobstvenost“, Nauka i ikonomika, IU – Varna. s. 293 – 305.
12. Nikolaev, R., M. Karakulakov. (2007) *Prehodat „Elementarna – vissha matematika“ – sastoyanie i problemi v IU – Varna*. sb. Dokladi na SMB – Varna „Matematika i informatika –realnosti i perspektivi“, izd. na VSU „Chernorizets Hrabar“, Varna, s. 155 – 165.
13. Sterligova, A. N. (2012). *Upravlenie zapasami v tsepyah postavok*. Moskva: Infra-M.

STATISTICAL THINKING – A TOOL FOR BETTER VISIBILITY IN THE INFORMATION FOG

Assoc. Prof. Margarita Lambova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: Reasoning is presented related to the need to rethink statistics education in order to create an opportunity to form statistical thinking as a mandatory element of the thought process of a free and informed person and thus overcome the problem of "numerical blindness" in society. It is concluded that the main reason preventing the creation of skills that can be qualified as statistical thinking is the patterning of statistics education by teaching ready-made "recipes" for the mechanical application of statistical methods "piecemeal", detached from the requirements and the logic of statistical methodology.

Keywords: Statistical thinking; Statistical education; Statistical methodology; Logic and Statistics

JEL code: A20, C18

СТАТИСТИЧЕСКОТО МИСЛЕНЕ – СРЕДСТВО ЗА ПО-ДОБРА ВИДИМОСТ В ИНФОРМАЦИОННАТА МЪГЛА

Доц. д-р Маргарита Ламбова
Икономически университет – Варна, България

„Ще дойде време, когато статистическото мислене ще бъде толкова необходимо на цивилизования човек, колкото и умението му да чете и пише.” Времето, за което се отнасят пророческите думи на визионера Хърбърт Уелс, отдавна е дошло, но за съжаление мисленето като цяло вече не е на мода. То масово се подменя с имитиращи мисловния процес алгоритмични „продукти”, сътворени по „модерния” за даден период шаблон, които сериозно ограничават свободата на мисълта. По този начин не само се поставят спирачки на критичното мислене като основна движеща сила на развитието на човешкия дух, но и се създава добра почва за целенасочено дистанционно управление на мисловния процес. Такива сурогати на мисловния процес доста агресивно изтласкват и статистическото мислене, настанявайки се на негово място, като така се създават перфектни условия за отразяване и възприемане на действителността през криво огледало.

Целта на доклада е обосновка на необходимостта от преосмисляне на обучението по статистиката, в което приоритетно би следвало да бъде формирането на статистическо мислене като задължителен елемент на мисловния процес на свободния и информиран човек.

Изложението не претендира за изчерпателност на разсъжденията по разглеждания проблем, акцентира се върху основни причини, които възпрепятстват включването на статистическото мислене в образователния фундамент на съвременното общество.

Статистическото мислене се основава на съвкупностен логически подход и на система от знания за логиката и философията на събирането, обработката, анализа и интерпретацията на числова информация за взаимосвързаните явления и процеси от заобикалящата ни действителност. То е предпоставка за правилното възприемане и осмисляне на числовата проекция на емпиричните дадености и на характеризиращите ги закономерности, като на тази основа позволява идентифицирането и решаването на практически проблеми с помощта на статистическа информация, която благодарение на дигиталната революция вече лавинообразно залива човечеството. Мрежата позволява светкавичното ѝ разпространение и не съществува сила, която е в състояние да я възпре и обуздае. На пръв поглед изглежда, че свободният и бърз достъп до информацията е необходимо и достатъчно условие за достигане на висша степен на мисловна свобода, възможна само, когато индивидите са в състояние да управляват живота си на базата на самостоятелно взети информирани решения. Свободният достъп до статистическа информация е предпоставка за добра осведоменост за закономерностите, характеризиращи явленията и процесите, но последната не е пряко следствие на освободената информация. Свободният достъп не гарантира, че потребителите на информация ще бъдат в състояние коректно да се информират. Връзката между информация и осведоменост се възпрепятства от една страна от недостига на критично мислене и от друга, от невъзможността за осмисляне на числови данни. Само индивиди с изградено статистическо мислене, същевременно неподвластни на мисловни шаблони, са в състояние да виждат и да се ориентират правилно в гъстата мъгла, предизвикана от лавината от числа, отразяващи с различна степен на достоверност емпиричната действителност. Останалите са „числово слепи” и със „замъглено мислене” (термините са заимствани от Gigerenzer, 2017), като не са в състояние да интерпретират правилно информацията и самостоятелно да формират представа за закономерностите, които се крият зад числовите данни. Те волю-неволю са принудени да се доверяват на чужда интерпретация и по този начин стават зависими и неспособни да разсъждават свободно, като формират дистанционно управлявано шаблонно мислене, което не позволява самостоятелното вземане на информирани решения на проблеми чрез претеглянето на рискове и ползи от дадено поведение или от определени действия.

Шаблонното мислене може да се възприеме като пряко следствие от държавния патернализъм, който в по-голяма или по-малка степен е характерен за всяка обществена система, налагаща своите норми и правила като единствено правилните, при което държавата играе ролята на мъдър и грижовен баща, а хората изпълняват ролята на членове на семейството, които безропотно се доверяват и подчиняват на бащината воля. Комфортно съществуване подобна система може да си осигури чрез възпитание в конформизъм - вкарване на индивидите в подходящия мисловен шаблон, осигуряващ приемането на това покровителство чрез готови правила и решения за нормална и неоспорима даденост. „Патернализмът ограничава свободата на хората, независимо дали им харесва или не – по предположение за тяхно добро.” (Gigerenzer, 2020). Ограничава се донякъде и мисловната свобода, тъй като чрез правилата и нормите, свързани със забраната на определени действия, квалифицирани като високорискови, се обезсмисля индивидуалната преценка на степента на риск на базата на априорна статистическа

информация. Мисловните шаблони се налагат още от училищната скамейка, като обучението по математика и статистика не прави изключение. „Нашите деца се обучават по алгебра, геометрия, тригонометрия и математически анализ. С други думи: ние им преподаваме математиката на сигурността, а не тази на несигурността, т.е. статистическо мислене....Често се твърди, че обучението по абстрактни дисциплини като алгебра и геометрия подобрява мисленето и умението за решаване на проблеми. Ако беше така, нямаше да имаме толкова лекари, които не разбират здравни статистики, или адвокати, които се объркват от ДНК доказателства...Ако желаем ново поколение, което може да решава стоящите пред нас проблеми, по-скоро би трябвало да му предоставим когнитивните инструменти, отколкото абстрактни принципи.”(Gigerenzer, 2020)

Логично е да предположим, че когато целта е изграждането на свободно и демократично общество, би трябвало да съществува стремеж образователният процес да бъде планиран по такъв начин, че делът на свободомислещите хора, които са в състояние самостоятелно и независимо да решават проблеми с помощта на статистическа информация, да се увеличава с течение на времето за сметка на дела на числово слепите.

От формална гледна точка този стремеж съществува – учебните програми по математика в училищното образование в България от 5. до 12. клас вече включват елементи на вероятности и статистика. Обучение по статистика е предвидено и в учебните планове на безброй специалности във висшите училища.

От съдържателна гледна точка включването на статистиката в образователния процес все още не е гаранция за успешно формиране на статистическо мислене и оттам решаване на проблема с числовата слепота.

Използваният методически подход при включването на статистиката в учебните програми по математика в училищното образование е изцяло подвластен на логиката на чистото число, за която е без значение, какво е естеството на числовите данни. „В този смисъл може да се твърди, че акцентът при обучението се поставя върху количествения анализ, като статистиката се свежда до съвкупност от механично приложими количествени способности, методи, техники и измерители, до голяма степен лишена от своя собствена логика и философия, от качествения анализ на данните, който е необходима предпоставка за правилен избор на методи и обуславя надеждността и логическата състоятелност на получените резултати.” (Ламбова, Стоянова, 2021). Знания относно различията в естеството на свойствата, характеризиращи единиците, чрез които се проявяват явленията в определени времеви и пространствени граници, за възможностите за измерване на различни по вид свойства и създаване на измерителни инструменти, както и за измерителните скали не са предвидени в учебните програми.

Ще дам конкретен пример с учебната програма по математика за 5. клас, според която учениците трябва да получат знания относно разчитането и интерпретирането на информация, представена с текст, с графики, с таблици или с диаграми. От гледна точка на логиката на чистото число не съществува проблем при подобен методически подход, но от гледна точка на статистическата логика подходът може да бъде сравнен с опит да се построи сграда без проект върху плаващи пясъци, тъй като никъде не е посочено, за каква информация става въпрос, не се изискват знания относно естеството на данните, които се представят

чрез таблици и диаграми. Като закономерно следствие в учебниците по математика са се появили изключително груби неточности и грешки, които от гледна точка на статистическата логика могат да бъдат квалифицирани като стъкмистика. Фрапантен пример е поместен в учебник по математика за 5. клас (Паскалева и др., 2016) - за построяване в координатната система на точкова, линейна и стълбовидна диаграма, изобразяваща разпределението на група ученици според предпочитания от тях сладолед – сметанов, шоколадов, плодов, орехов, т.е. според значенията на признак с номинално ниво на скалиране. В същия учебник фигурира пример, явно предназначен за получаване на умения за разчитане на таблици, в който е показано, как чисто алгоритмично, без обяснения, свързани с логиката, се изчислява средна аритметична претеглена величина от значенията на ординално скалирания признак оценка. Въпреки че в практиката се е наложило изчисляването на среден аритметичен успех, тази числова конструкция е получена чрез аритметични действия със субективно определени числови рангове на псевдоколичествен признак с ординално ниво на скалиране, което не е допустимо и не би следвало още в началото на обучението по статистика да се дава пример на учениците, как изискванията на статистическата методология могат да не бъдат спазвани.

Статистическо мислене не се създава чрез обучение, което има за единствена цел създаването на умения за механично прилагане на статистически методи и изчисляване на измерители по шаблон (формули), без оглед на логическото естество на информацията, без дори да бъдат загатнати предпоставките и ограниченията за тяхното използване. За съжаление тенденцията на развитие както на средното, така и на висшето образование е точно такава – бягство от фундаменталните знания и приоритет на „практически“ умения и компетентности без сериозна теоретична основа. Правилно ли е обаче умения за изчисляване на статистически измерители по формула и/или чрез потребителски статистически софтуер да бъдат квалифицирани като практически, при положение че притежателят на тези умения няма представа при какъв вид емпирична информация е допустимо да бъдат осъществявани тези изчисления?

Опитите за принизяване на статистическата наука до лишен от своя собствена философия и логика механичен сбор от универсално приложими количествени методи зачестяват не само в средното, но и във висшето образование. Пример за такъв опит е включването на обучение по статистика в учебна дисциплина, наречена „Количествени методи“, като подобно наименование противоречи на логиката на статистическата наука. „Статистическото изучаване се характеризира с единство между количествената и качествената страна на явленията, т.е. изучаването на количествената страна на явленията се основава на знанията за качествената им природа“. (Гатев, 1991)

За съжаление потребителският статистически софтуер също подпомага шаблонизирането на статистическото образование, особено когато той се използва като основен инструмент за алгоритмичното усвояване на механичното приложение на статистически методи „на парче“ (виж Ламбова, 2020). Напълно споделям мнението на Rüger (2012), според който „наивистичното „необвързано с теорията“ приложение на статистически методи, подход, изкушаващ с достъпността на статистически програмни пакети и съответно широко

разпространен, води до напълно необозрими последствия с възможни сериозни грешки в емпиричната изследователска практика.”

Подобни практики за даване на абсолютен приоритет на количествения анализ и изучаването на статистически методи „на парче” по готови „рецепти” сугестират практическа насоченост на обучението, но могат да бъдат сравнени със строеж на сграда без проект и без фундамент. Те причиняват вреда не само защото не позволяват създаването на фундаментални системни знания за статистическата методология, но и защото възпрепятстват формирането на статистическо мислене.

Статистическото мислене е необходимо не само при прилагане на статистически инструментариум за анализ на емпирична информация, то е предпоставка за правилното възприемане и осмисляне на такива данни, както и на резултатите от осъществен статистически анализ, което означава, че не би следвало да е присъщо само на ограничен кръг индивиди, занимаващи се със статистика и/или ползващи статистически инструментариум, а на всеки потребител на информация, т.е. на всички без изключение. Ако стремежът е преодоляване на числовата слепота в обществото, всеки потребител на информация би следвало да има изградено статистическо мислене, тъй като дори в ежедневието си всеки от нас е изправен пред житейски дилеми, при които изборът на поведение, действие или подход се прави на базата на преценката на ползи и рискове, зависеща от степента на информираност за определени статистически закономерности.

Свободният, критично мислещ човек, който желае да управлява живота си на базата на собствени информирани решения, а не с помощта на наложени му шаблони, би следвало:

- Да разбира логиката на основните измерители, чрез които се задават закономерностите, характеризиращи явленията и процесите;
- Да осмисля облечените в числа закономерности на заобикалящата действителност и да бъде в състояние да преценява, дали числовата „премяна” е качествена или отразява емпиричните дадености през криво огледало;
- Да бъде в състояние да различава истинската статистика, стъпила здраво върху основите на статистическата методология, от вездесъщата и доста агресивна стъкмистика, резултат от статистическо невежество или целенасочена манипулация;
- Да използва съвкупностен логически подход при интерпретацията на числова информация за явления и процеси от обкръжаващата действителност, даващ възможност дори чисто интуитивно да бъдат вземани решения чрез преценка на „тежестта” на информацията от гледна точка на това, дали тя отразява статистическа закономерност или е свързана със случайни ефекти при единични случаи;
- Да бъде в състояние да осмисля относителните различия, които много често се използват целенасочено като средство за манипулация;
- Да разбира връзката между относителни честоти и вероятности;
- Да може да калкулира риска от определени свои действия на базата на статистическа информация;

- Да осмисля сигурност и несигурност, когато те по своята същност са условни вероятности и т.н.

Списъкът с умения, необходими за преодоляване на числовата слепота, не претендира за изчерпателност, но той показва, какви би следвало да бъдат приоритетите при обучението по статистика както в средното, така и във висшето образование, ако целта е изграждането на статистическо мислене като необходим елемент на мисловния процес на свободния и информиран човек.

Съобразно поставената цел е обоснована необходимостта от преосмисляне на обучението по статистика, при което, за да е възможно формирането на статистическо мислене, би следвало вместо на количествения анализ с помощта готови „рецепти“ да се обръща повече внимание на статистическата логика.

Направените разсъждения позволяват идентифицирането на основен фактор, не само възпрепятстващ създаването на знания и умения, които могат да бъдат квалифицирани като статистическо мислене, но същевременно стимулиращ възпроизводството и задълбочаването на проблема с числовата слепота. Това е шаблонизацията на обучението по статистика чрез стремежа към създаването на псевдопрактически алгоритмични умения за механично приложение на статистически методи „на парче“, които не стъпват върху основите на статистическата методология, следователно нямат нищо общо със статистическата логика.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Gatev, K. (1991). *Obshta teoria na statistikata*. Sofia, Izdatelstvo “Nauka i izkustvo”. [Гатев, К. (1991) *Обща теория на статистиката*. София, Издателство „Наука и изкуство“.]
2. Gigerenzer, G. (2020). *Risiko. Wie man die richtigen Entscheidungen trifft*. München: Pantheon Verlag.
3. Gigerenzer, G. (2017). *Das Einmaleins der Skepsis. Über den richtigen Umgang mit Zahlen und Risiken*. München: Piper Verlag.
4. Lambova, M. (2020). Digitalizatsiyata – blagodat ili proklyatie za statisticheskoto obrazovanie. *Ikonomicheska nauka, obrazovanie i realna ikonomika: Razvitie i vzaimodeystvia v digitalnata epoha: Yubileyna mezhdunarodna nauchna konferentsia*. Varna, Nauka i ikonomika, tom IV, pp. 378-386
5. Lambova, M., Stoyanova, V. (2021). Diskusionni momenti, svarzani s obuchenieto po statistika kato dyal ot matematikata v uchilishtnoto obrazovanie . *Strategies for Policy in Science and Education*. Sofia, Az Buki, Vol. 29, Issue 5, pp. 492-508.
6. Paskaleva, Z., Alashka, M., Alashka, R. (2016). *Matematika 5. klas*. София, издателство Архимед.
7. Rüger, B. (2012). *Test- und Schätztheorie, Band I: Grundlagen*. München, Wien, Oldenbourg Verlag.

FORECASTING RETAIL SALES OF FOOD, BEVERAGES AND TOBACCO PRODUCTS IN THE REPUBLIC OF BULGARIA USING AN ARIMA MODEL

Assoc. Prof. Michal Stojanov, PhD
University of economics – Varna, Bulgaria

Abstract: Information on the historical development of retail sales of food, beverages and tobacco products in the country can be used for the purposes of forecasting their future change. This approach is based on a procedure formulated by G. Box and G. Jenkins, who derive a methodology for constructing linear time series models based on autoregressive integrated moving averages. The logical structure of the text is developed in the stages of identification of a stochastic ARIMA model, estimation of its parameters and verification of their optimality. This allows in the final phase, based on an ARIMA(1,1,0) model of food, beverage and tobacco retail sales, to make a quantitative forecast for the next time period within the existing risks and challenges of the market environment.

Keywords: ARIMA; Econometric forecasting; Retail trade sales; Food, beverages and tobacco products

JEL code: C22, E27

ПРОГНОЗИРАНЕ НА ПРОДАЖБИТЕ НА ДРЕБНО НА ХРАНИ, НАПИТКИ И ТЮТЮНЕВИ ИЗДЕЛИЯ В РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ ЧРЕЗ ARIMA МОДЕЛ

Доц. д-р Михал Стоянов
Икономически университет – Варна, България

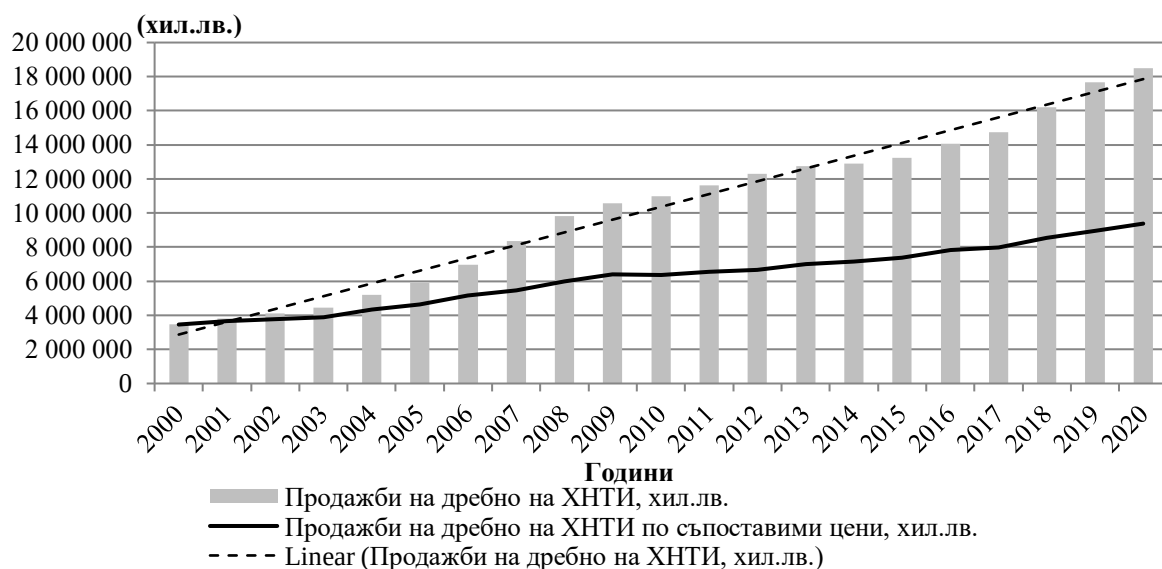
През изминалите 20 години пазарът на потребителски стоки в България посреща системните предизвикателства на значими вътрешни и международни обществени и икономически промени. Такива например са обявеният от Европейската комисия през 2002 г. статут на страната за функционираща пазарна икономика, присъединяването към ЕС от 2007 г., световната финансово-икономическа криза от 2008-2009 г., пандемията от COVID-19, дигиталната трансформация, глобализацията и пр. Всички те имат своите положителни и негативни ефекти върху промените на основни икономически показатели, бележещи развитието на икономическата система. Продажбите на дребно винаги са били популярен индикатор за “пулса на икономиката и нейния прогнозиран път към разширяване или свиване” (Kenton, 2022). Ето защо тяхното икономическо моделиране „има огромна търговска стойност ... като е приложимо във всеки бизнес“ (Prabhakaran, 2021).

Основната цел на работата е въз основа на информацията за историческото развитие на продажбите на дребно на храни, напитки и тютюневи изделия в страната да бъде идентифициран, оценен и диагностициран ARIMA модел, който да бъде приложен за целите на прогнозирането на тяхното бъдещо изменение.

Основен обект на изследване в настоящата работа са данните за продажби на дребно на „Храни, напитки и тютюневи изделия“ (хил. лв.) в Република

България, систематизирани от НСИ като годишна отчетност в периода 2000-2020 г. Освен фактическите стойности на достигнатия стойностен обем на продажбите на дребно на „Храни, напитки и тютюневи изделия“ (Sales) са анализирани и техните логаритмично трансформирани оценки ($\ln Sales$), които са по-подходящи за целите на количественото иконометрично моделиране. С помощта на това предварително преобразуване на динамичния ред, формиран от натуралните логаритми на първоначалните променливи „се осигурява съвместимост на изучаваните индикатори, като могат да се формират и средни стойности, разположени в рамките на диапазон“ (Kaneva, 2019, p. 103), освен това се приема, че „промените в натуралния логаритъм са (почти) равни на процентните промени в първоначалните данни, от това следва, че наклонът на линията на тренда, е равен на средният процентен растеж в оригиналната серия“ (Lütkepohl, 2012). В работата се прилага методологията, предложена от Бокс-Дженкинс (Box and Jenkins, 1970; Box et al., 2015), при която закономерностите на динамичния ред служат като основа за генерирането на количествена прогноза за неговото очаквано развитие в момента $t+1$. Тя се основава на алгоритъм, преминаващ през фазите на Идентификация, Оценка, Диагностика и Прогнозиране и е една от най-популярните и широко използвани техники за прогнозиране на едномерни времеви редове (D'Amico, 2021). За целите на квантифицирането на различните статистически характеристики, параметри и критерии е използван софтуерният продукт Eviews 9.

Статистическата отчетност на НСИ за продажбите на дребно на „Храни, напитки и тютюневи изделия“ (ХНТИ) позволява да се представи графичен образ на динамичния ред, като се обхващат годините на периода 2000-2020 г. (вж. фиг. 1). С негова помощ и посредством „метода на свободното изразяване“ (Radilov, et al., 2015, с. 217) можем да заключим за наличието на нарастваща тенденция на развитие, съпроводена с колебания от различен характер.



Фиг. 1. Продажби на дребно на „Храни, напитки и тютюневи изделия“ (по текущи и съпоставими цени при 2000 г.=100) в България по години на периода 2000-2020 г.

Източник: INFOSTAT - National statistical institute, 2022.

На следващ етап визуалният анализ на корелограмите, така и обобщените оценки за функциите на автокорелация и частна автокорелация подкрепят заключението, че изследваният динамичен ред на продажбите на дребно на ХНТИ и на натуралните логаритми на продажбите на дребно на ХНТИ не са стационарни, което се подкрепя от оценките на коефициентите на автокорелация, които имат постепенно намаляващи или често пъти определяни като затихващи стойности с ясно изразен пик в първия лаг при частната автокорелация (вж. фиг. 2 и 3). Това позволява да се направи констатацията, че изследваният динамичен ред е нестационарен по отношение на средната и в него се наблюдава възходящ линейен тренд. По своята същност фактическите данни се корелират при лаг 1, което се приема за типичен случай при икономическите явления, където текущата величина в най-голяма степен се определя от достигнатото състояние в предходния момент. Коефициентът от първи порядък има стойност $AC1_{Sales} = 0,854$ за фактическите стойности на продажбите на дребно на ХНТИ и $AC1_{LnSales} = 0,857$ за натуралните логаритми на продажбите на дребно на ХНТИ. Емпиричната характеристика на Бокс-Люнг (Q-Stat) $\left(BL_1 = \frac{N \times (N+2)}{(N-1)} \times AC^2 \right)$ е 17,607 за първия и 17,735 за втория динамичен ред и е по-голяма от теоретичната стойност 6,635 (χ^2 – разпределение с 1 степен на свобода и риск за грешка от 0,01), което е количественото доказателство за наличието на тенденция на развитие във времевите редове. Това предполага, че въз основа на визуалната инспекция и оценките на АС и РАС може да приемем, че във времевия ред се констатира „АС функция, която е експоненциално затихваща или синусоидална и има значителен пик при лаг $p = 1$ в РАС функцията, която няма значими оценки след лаг p , което предполага, че данните може да следват модел $ARIMA(p,d,0)$ “ (Hyndman & Athanasopoulos, 2018).

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				1	0.854	0.854	17.607	0.000
				2	0.699	-0.110	30.034	0.000
				3	0.552	-0.063	38.205	0.000
				4	0.417	-0.049	43.148	0.000
				5	0.288	-0.075	45.660	0.000
				6	0.171	-0.059	46.599	0.000
				7	0.062	-0.070	46.730	0.000
				8	-0.038	-0.068	46.783	0.000
				9	-0.119	-0.039	47.350	0.000
				10	-0.188	-0.060	48.905	0.000
				11	-0.254	-0.087	52.019	0.000
				12	-0.317	-0.097	57.425	0.000

Фиг. 2. Автокорелационни (АС) и частни (РАС) автокорелационни коефициенти на продажбите на дребно на ХНТИ (Sales)

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob	
				1	0.857	0.857	17.735	0.000
				2	0.707	-0.104	30.431	0.000
				3	0.553	-0.102	38.627	0.000
				4	0.401	-0.090	43.191	0.000
				5	0.261	-0.062	45.248	0.000
				6	0.133	-0.067	45.820	0.000
				7	0.023	-0.049	45.838	0.000
				8	-0.068	-0.040	46.010	0.000
				9	-0.137	-0.026	46.768	0.000
				10	-0.196	-0.063	48.456	0.000
				11	-0.252	-0.089	51.523	0.000
				12	-0.305	-0.089	56.502	0.000

Фиг. 3. Автокорелационни (АС) и частни (РАС) автокорелационни коефициенти на натуралните логаритми на продажбите на дребно на ХНТИ (LnSales)

Допълваме логическата конструкция на анализа с проверка на времевите редове за интегрираност, което е извършено с помощта на теста на Дики-Фулър (ADF), където нулевата хипотеза е за наличието на нестационарност, която се идентифицира с наличието на единичен корен, а алтернативната хипотеза е за наличието на стационарност. Тестът за единичен корен се конструира чрез модел, в който последователно са избрани: да бъде без и с включена константа, с константа и линеен детерминистичен тренд, с автоматично дефиниран лагов порядък. В конкретните изпробвания максималният лаг е 4. Получената оценка на тестовата характеристика на Дики-Фулър се съпоставя с критична стойност на тестовата величина по МакКинън при 1%, 5% или 10% риск за грешка (вж. таблици 1 и 2). Съпоставката посочва по-ниска от критичните стойности за всички тествани модели (с включена константа, с константа и линеен детерминистичен тренд и без константа). Това с определена вероятност посочва, че редът е нестационарен и хипотезата за единичен корен не може да бъде отхвърлена, т.е. първоначалните данни са интегрирани поне от първи порядък, което изисква допълнително провеждане на идентични тестове за първи и при необходимост за втори разлики. Изводите по критерия на Дики-Фулър се потвърждават и в двата динамични реда и при абсолютните стойности на продажбите на дребно на ХНТИ (Sales) и при техните натурални логаритми (LnSales).

Таблица 1

Резултати от тестването за единичен корен в динамичния ред на ХНТИ (Sales)

Стационарност на равнищата I(0)					
Null Hypothesis: Sales has a unit root					
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=4)					
Exogenous	Augmented Dickey-Fuller test statistic (ADF)		Test critical values		
	t-Statistic	Prob.*	1% level	5% level	10% level
Constant	-0,151607	0,9297	-3,831511	-3,029970	-2,655194
Constant, Linear Trend	-3,393047	0,0821	-4,532598	-3,673616	-3,277364
None	1,254483	0,9404	-2,692358	-1,960171	-1,607051

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Забележка: Тъй като р-стойност > 0,05, не можем да отхвърлим нулевата хипотеза (H0: Sales има единичен корен).

Таблица 2

Резултати от тестването за единичен корен в динамичния ред на натуралните логаритми на ХНТИ (LnSales)

Стационарност на равнищата I(0)					
Null Hypothesis: LnSales has a unit root					
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=4)					
Exogenous	Augmented Dickey-Fuller test statistic (ADF)		Test critical values		
	t-Statistic	Prob.*	1% level	5% level	10% level
Constant	-1,720493	0,4057	-3,831511	-3,029970	-2,655194
Constant, Linear Trend	-1,829480	0,6501	-4,532598	-3,673616	-3,277364
None	1,100496	0,9229	-2,692358	-1,960171	-1,607051

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Забележка: Тъй като $p > 0,05$, не можем да отхвърлим нулевата хипотеза (H_0 : LnSales има единичен корен).

На изучаване ще бъде подложен модел от типа $ARIMA(1,1,0)$. Определянето на авторегесионен параметър от $p = 1$ е закономерен продукт на констатациите от визуалната инспекция на корелограмите и заключението, че икономическото явление в най-голяма степен се предопределя от неговите оценки в предходния момент. В селектирания модел интегрираният параметър $d = 1$ ще свидетелства, че данните са нестационарни по отношение на тренда и е необходимо прилагане на първи последователни разлики. Едновременно с това параметърът на плъзгащите средни $q = 0$ ще се предопределя от липсата на сериозни скокове и/или спадове в изходните данни за продажбите на дребно. Допълнително, селектираният модел в неговата иконометрична семплост, позволява да се спазва принципа количественото изследване да не бъде прекомерно усложнено и с високи претенции и свръхочаквания.

Изборът на най-добър модел сред проведените два експеримента е свързан с по-ниската стойност на информационните критерии BIC и AIC, които в първия модел $BIC_{ARIMASales(1,1,0)}$ е 25,846, $AIC_{ARIMASales(1,1,0)}$ е 28,578, а във втория $BIC_{ARIMALnSales(1,1,0)}$ е -6,359, $AIC_{ARIMALnSales(1,1,0)}$ е -3,598.

Таблица 3

Сравнителни характеристики по критерии за селекция на модел

Критерии	Модел		Избран модел
	A) $ARIMA_{Sales}(1,1,0)$	B) $ARIMA_{LnSales}(1,1,0)$	
C p-value < 0,01	0,0024	0,0097	A и B
AR(1) p-value	0,0105	0,0008	B
SIGMASQ	110,000,000,000	0,001147	B
Log likelihood	-282,782434	38,987487	B
AIC	28,578243	-3,598749	B
BIC	28,727603	-3,449389	B
Hannan-Quinn	28,607400	-3,569592	B

Получените параметри на двата експериментирани модела показват, че и константата и авторегресионния параметър при двата са статистически значими при възприетото еталонно равнище на значимост от 0,05. В допълнение е извършено тестване на остатъците от построените модели, където не се отчитат статистически значими скокове в автокорелационните и частните автокорелационни коефициенти, които са в рамките на определените доверителни

интервали и не се наблюдават сериозни пикове в тяхното развитие. Това обстоятелство се потвърждава и на основа на статистиката на Box-Ljung, която позволява да се направи извод за случаен характер на остатъците и на двата модела, които попадат в рамките на определените доверителни интервали, което се констатира със значимост много по-голяма от 0,05 и позволява да направим заключение за случаен характер на тяхното развитие (вж. фиг. 4).

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.131	0.131	0.3959		
		2	-0.037	-0.055	0.4285	0.513	
		3	0.058	0.071	0.5144	0.773	
		4	-0.007	-0.028	0.5158	0.915	
		5	-0.111	-0.102	0.8751	0.928	
		6	-0.187	-0.169	1.9713	0.853	
		7	-0.021	0.017	1.9867	0.921	
		8	-0.096	-0.107	2.3254	0.940	
		9	-0.222	-0.190	4.2969	0.829	
		10	-0.003	0.021	4.2974	0.891	
		11	0.094	0.051	4.7322	0.908	
		12	0.163	0.149	6.1904	0.860	

Фиг. 4. Ljung-Box Q-статистика на остатъчните компоненти на модела $ARIMA_{LnSales}(1,1,0)$

Окончателният избор дава предпочитание на по-ниската нормализирана стойност на информационните критерии за втория модел, основан върху натуралните логаритми на продажбите на дребно на ХНТИ и може да се пристъпи към анализ на неговите параметри и тестови характеристики. Същевременно в подкрепа на селекцията на модела са и стандартните грешки (RMSE) и средна абсолютна процентна грешка (MAPE), които отново дават превес на модела, използващ натуралните логаритми на продажбите на дребно на ХНТИ.

Параметризацията на модела е свързана с представяне на неговите оценки и техните статистически характеристики. За избрания модел $ARIMA_{LnSales}(1,1,0)$ те са свободен член с оценка от 0,081, който има t -статистика от 2,912, статистически значима с p -стойност от 0,0097 и коефициент на регресия 0,701, отново с много силна статистическа значимост на t -статистиката от 4,054, при ниво на значимост от 0,0008 на оценката.

За да се извърши проверка за адекватността и надеждността на модела за целите на прогнозирането се извършват още няколко теста, като въз основа на техните контролни оценки, изведени в програмна среда на Eviews може да се заключи, че при модела на натуралните логаритми на продажбите е получена оценка на F -статистиката от 9,261, което отново в статистически контекст е израз на надеждността на конструирания модел при равнище на значимост $\alpha = 0,01$ с гаранционна вероятност по-голяма от 0,99. Освен упоменатата по-горе статистика на остатъците е направен и тест чрез критерия на Дърбин-Уотсън. Неговата оценка е от 1,665 (съобразен е по-малкият обем на извадката $N=20$), при риск за грешка от 5% и критични таблични стойности $dL = 1,20$ и $dU = 1,41$ и на тази основа $(4-dU) = 2,39$ или емпиричната оценка на теста $DW = 1,665$ попада в рамките на двете критични значения $dU < DW < (4-dU)$. Това означава, че можем да

направим заключението, че остатъчните елементи на построения регресионен модел нямат автокорелационни смущения и това позволява да се потвърди, че и по този критерий моделът е добър.

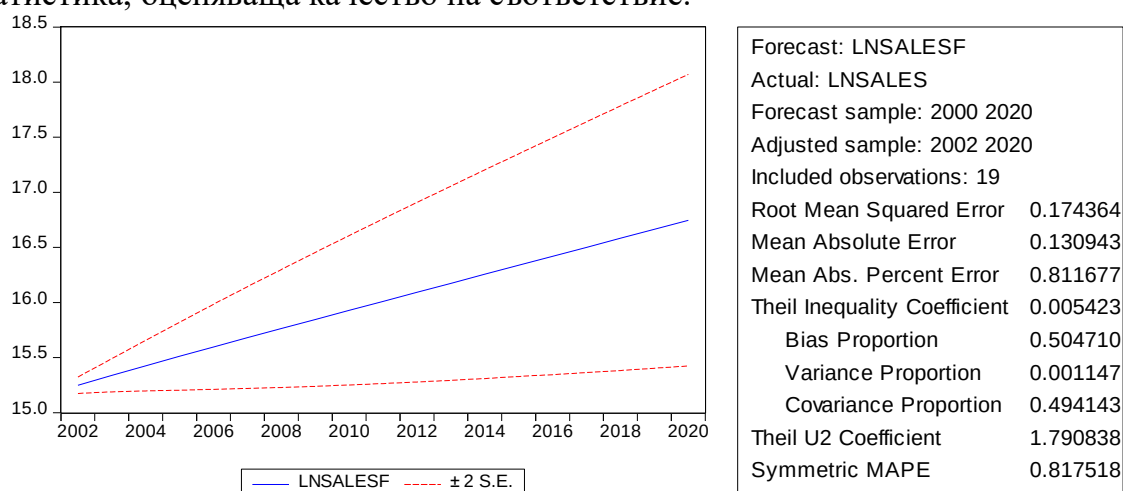
Избраният модел има следния теоретичен вид (Nau, 2020):

$$\hat{Y}_t - Y_{t-1} = \mu + \phi_1 \times (Y_{t-1} - Y_{t-2}),$$

като след трансформиране придобива вида:

$$\hat{Y}_t = \mu + Y_{t-1} + \phi_1 \times (Y_{t-1} - Y_{t-2}),$$

където Y_{t-2} , Y_{t-1} , Y_t са натуралните логаритми на продажбите на дребно на ХНТИ за съответните години. След заместване $ARIMA_{LnSales}(1,1,0)$ се формализира като: $\hat{Y}_t = 0,081 + Y_{t-1} + 0,701 \times (Y_{t-1} - Y_{t-2})$. На фиг. 5 е дадено графичното представяне на прогностичния модел $ARIMA_{LnSales}(1,1,0)$, заедно с прогнозата за стандартните грешки с асиметрични доверителни интервали и статистика, оценяваща качество на съответствие.



Фиг. 5. Резултати от прогностичния модел $ARIMA_{LnSales}(1,1,0)$

Прогнозата получена въз основа на антилогаритмуване на оценката от конструирувания модел посочва, че през 2021 г. е възможно обемът на продажбите на дребно на ХНТИ да достигне величина от 20 733 204 хил. лв. Количествената оценка на продажбите на дребно на ХНТИ за 2021 г. индикира възходящата посока на развитие. Разбира се прогнозната оценка е обременена със стохастична грешка и под въздействието на неподлагачи се на точно предвиждане фактори на пазарната среда. Такива трудно предвидими сили са ефектите на ограничителните мерки, налагани от правителството и здравните власти, предизвикани от вирусната инфекция от COVID-19, политическата турбулентност, динамиката на международните цени на основните суровини и енергийни източници и др. Независимо от това, направената прогноза може да бъде ориентир за вземането на бизнес решения в областта на търговията на дребно с ХНТИ. Квантифицираният модел, изграден въз основа на вътрешните закономерности в динамичния ред, позволява получаване на оценка, която дава оптимистично нарастване на продажбите на дребно за следващия отчетен период, което ще може да бъде проверено за успешността на предвиждането в края на календарната 2022 г., когато НСИ ще публикува данни за обема на търговията на дребно с храни, напитки и тютюневи изделия за 2021 г. Приложението на $ARIMA$ моделите демонстрира възможностите за анализ и извличане на информация от данни чрез

приложение на теоретично познание, преподавано във фундаменталното и специализираното обучение във висшето образование и тяхното практическо използване за оценка на тенденциите в развитието на основни икономически показатели в краткосрочен времеви хоризонт.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Box, G., Jenkins, G. (1970). Time Series Analysis: Forecasting and Control. San Francisco, Holden-Day.
2. Box, G., Jenkins, G., Reinsel, G. C., Ljung, G. M. (2015). Time Series Analysis: Forecasting and Control. 5th Ed., John Wiley and Sons Inc., Hoboken, New Jersey.
3. D'Amico, J. (2021). How to Estimate ARIMA Models in EViews. JD Economics. [Online] Available from: <https://www.jdeconomics.com/arima-model-in-eviews/> Accessed on (23.07.2022).
4. Hyndman, R. J, Athanasopoulos, G. (2018). Forecasting: principles and practice. 2nd Ed., OTexts, Australia. [Online] Available from: <https://otexts.com/fpp2/non-seasonal-arima.html> Accessed on (11.07.2022).
5. Kaneva, M. (2019). Broadband and e-Commerce in the Balkans - Econometric Analysis. Izvestia Journal of the Union of Scientists - Varna. Economic Sciences Series, 8(2), pp. 100-109. doi:10.36997/IJUSV-ESS/2019.8.2.100
6. Kenton, W. (2022). Retail sales. Investopedia, Dotdash Meredith publishing. [Online] Available from: <https://www.investopedia.com/terms/r/retail-sales.asp> Accessed on (23.07.2022).
7. Lütkepohl, H., Xu, F. (2012). The role of the log transformation in forecasting economic variables. Empirical Economics, 42(3), pp. 619-638. [Online] Available from: <https://www.econstor.eu/bitstream/10419/26636/1/595754392.PDF> Accessed on (01.07.2022)
8. Nau, R. (2020). Statistical forecasting: notes on regression and time series analysis. [Online] Available from: <https://people.duke.edu/~rnau/411arim.htm> (01.07.2022).
9. INFOSTAT - National statistical institute. (2022). Prodazhbi na drebno po grupi stoki. [Online] Available from: https://infostat.nsi.bg/infostat/pages/reports/query.jsf?x_2=292 (23.07.2022).
10. Prabhakaran, S. (2021). ARIMA Model – Complete Guide to Time Series Forecasting in Python. Machine Learning Plus. [Online] Available from: <https://www.machinelearningplus.com/time-series/arima-model-time-series-forecasting-python/> (23.07.2022).
11. Radilov, D., Zhekova, S., Todorova, S., Dimitrova, V., Kaneva, M., Stoyanova, V., Karadimova, D., Lyubenov, L., Zhelyazkova, S., Chervenski, G., Kapitanov, K. (2015). Vavedenie v statistikata. Varna: Univ. izd. Nauka i ikonomika.
12. Smokova, M. (2009). Prognoziranje s metoda na ekponentsialното izglazhdane s IBM SPSS STATISTICS i ForecastX7 (Rakovodstvo za reshavane na kazusi po „Marketingovo prognoziranje“).

THE THEORY OF ACCOUNTING AS A FUNDAMENTAL LEARNING DISCIPLINE

Assoc. Prof. Svetlozar Stefanov, PhD
University of Economics - Varna, Bulgaria

Abstract: *The subject of consideration in this report is the need to study the Theory of Accounting as a fundamental learning discipline. The emphasis is on the fundamental categories and principles that prejudge the need to include discipline in the curriculum of different economic specialties. The place of the Theory of Accounting in Economics Studies stems from the noun traditions in university economic education. Tradition dictates that, in addition to close professional knowledge, future economists should have a broader view of economic processes, and economic science should be perceived in broader philosophical, moral and ethical aspects. In this sense, the role of the Theory of Accounting as a fundamental learning discipline is limited to the development (in future economists) of skills for self-critical thinking, reasoning and defending these opinions, awareness of the value dimensions, awareness of the moral and ethical norms of the profession of the economist, etc.*

Keywords: *Theory of Accounting; Education; Fundamental disciplines*

JEL code: *M41*

ТЕОРИЯТА НА СЧЕТОВОДСТВОТО КАТО ФУНДАМЕНТАЛНА УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА

Доц. д-р Светлозар Стефанов
Икономически университет – Варна, България

Независимо от някои различия в наименованието на отделните раздели, структурата на учебния план на различните специалности в университетите по икономика, включва следните три вида учебни дисциплини: Фундаментални, Университетски специални и Специални. Също така съществува богат набор от фундаментални учебни дисциплини, които по преценка на ръководствата на университетите могат да бъдат включени за изучаване от студентите като задължителни, избираеми или факултативни. Обхватът на фундаменталните учебни дисциплини обикновено не е еднакъв в различните университети, предлагащи образователни програми по икономика. Независимо от различията в обхвата, една от основните, фундаментални дисциплини, която задължително присъства в учебните планове на всички университети е дисциплината „Теория на счетоводството.“ Разбира се, това съвсем не е случайно, а се основава на разбирането, че посредством изучаването на теорията на счетоводството, студентите получават фундаментални знания, които им дават възможност да придобият един по-широк поглед върху икономическите процеси. Освен тесни професионални знания, бъдещите икономисти трябва да притежават и един по-широк поглед върху икономиката, в това число и върху нейните исторически, философски, морални и етични измерения.

Идеята за включването на фундаменталните учебни дисциплини в обучението на студентите по икономика се свързва с концепцията за фундаменталното образование, формулирана от Хумболт, в началото на XIX век. В основата на тази концепция е залегнала идеята, че посредством образованието, студентите трябва да получат фундаментални знания, формирани на определен етап от развитието на икономиката и обществото. В този смисъл, акцентът в настоящия доклад ще бъде поставен върху знанията, уменията и компетентностите, които студентите по икономика трябва да получат, посредством изучаването на дисциплината „Теория на счетоводството.“ Съвсем не е случаен фактът, че това е една от фундаменталните учебни дисциплини, която се изучава под различни наименования: („Теория на счетоводството“, „Основи на счетоводството“, „Въведение в счетоводството“ и др.), от всички студенти по икономика. Посредством изучаването на дисциплината, студентите получават теоретични знания и практически умения, които обогатяват тяхната икономическа култура. Обект на изучаване в дисциплината са историческите аспекти в развитието на счетоводството, неговият предмет и метод, счетоводният баланс, системата на счетоводните сметки и способа на двойното записване, документирането, инвентаризирането, оценяването, калкулирането, процесът на годишното счетоводно приключване и съставянето на финансовите отчети. По този начин студентите придобиват базисни знания в сферата на счетоводството, които са им необходими, както за усвояването на други икономически дисциплини, така и за успешното им реализиране като икономисти в стопанската практика.

Мястото на теорията на счетоводството в раздела на фундаменталните дисциплини в учебните планове на различните икономически специалности се определя и от съществуващите традиции в икономическото образование. В този смисъл, както вече беше посочено, традицията повелява, бъдещите икономисти да притежават знания относно историческите, философските, моралните и етични аспекти на икономиката.

В контекста на горепосоченото, ролята и значението на теорията на счетоводството, като фундаментална учебна дисциплина е да развива у бъдещите икономисти умения за самостоятелно критично мислене, аргументиране и защитаване на тези и становища, способности за прилагане на получените теоретични знания в стопанската практика и др. В този смисъл, дисциплината „Теория на счетоводството“ е призвана да развие мисловните и аналитични способности на студентите по икономика, както и тяхната обща икономическа култура. Именно това отличава преподаването на „Теорията на счетоводството“ като университетска академична дисциплина, от преподаваните дисциплини с аналогично наименование в средното образование или в курсовете за професионално обучение. Университетът, следва да формира академично поведение, а не да свежда обучението по счетоводство, до елементарното занаятчийско равнище. Следователно една от основните задачи на теорията на счетоводството като фундаментална учебна дисциплина е да повиши общата култура на бъдещите икономисти, тъй като поради спецификата на тяхната работа, на тях им се налага да имат задълбочени познания в повече от една сфера от функционирането на икономиката. На следващо място, тя е призвана да

формира едно специфично възпитание на бъдещите икономисти, да дава възможност за правилното използване на различните икономически понятия и категории, както и да им даде познания, относно механизмите по които функционира икономиката.

Не случайно, дисциплината „Теория на счетоводството“ се изучава през първата или през втората година от обучението на студентите по икономика. Съвсем естествено е, тя да бъде поставена в началото на икономическото образование. Последното се определя от факта, че в нея се изучават едни от основните икономически понятия и категории, които са залегнали в основата на икономическото мислене. Практиката показва, че когато студентите натрупат дефицити при обучението си по теория на счетоводството, изучаването на останалите икономически, в т. ч. и счетоводни дисциплини, изключително се затруднява.

Друг проблем при изучаването на дисциплината „Теория на счетоводството“ е абстрактността на някои понятия и категории. Тук съвсем естествено е да възникне въпросът кога (в кой семестър или през коя учебна година) следва да се изучава теорията на счетоводството. Или казано по друг начин, дали с курса по „Теория на счетоводството,“ обучението по икономика трябва да започне или с тази дисциплина, то следва да завърши. В това отношение съществуват различни подходи, които най-общо се свеждат до два. Първият подход, който е възприет в повечето университети е, с курса по „Теория на счетоводството,“ обучението по икономика да започне и втория – в първата или втората година, да се изучава един въвеждащ курс с наименование „Основи на счетоводството,“ „Въведение в счетоводството“ и др., а проблемите на счетоводната теория да се изучават през последната година на бакалавърската степен на обучение или дори по време на обучението в ОКС Магистър.

Имайки предвид горепосоченото, следва да се обележи, че за разлика от специфичните знания, които се получават по специалните счетоводни дисциплини, знанията по дисциплината „Теория на счетоводството“ се променят сравнително бавно и се отличават със своето постоянство във времето. Именно в това е и смисъла на тези фундаментални знания – да дават възможност на вече завършили студенти, да мислят, критично да анализират проблемите възникващи на всеки един етап от икономическото развитие, което представлява и предпоставка за успешната им реализация в стопанската практика.

Усояването на тези знания на съвременния етап значително се затруднява, поради особеностите на бизнес средата и характера на времето в което живеем. Понастоящем студентите са изключително прагматични и преобладаващата част от тях имат изключително прагматично отношение към образованието по икономика. Последното е свързано с желанието на студентите, да получават знания и умения, които могат да бъдат приложени непосредствено в практиката и които са търсени от работодателите. Нещо повече, студентите не са склонни да плащат и „да си губят времето“ за изучаването на дисциплини, които нямат конкретно икономическо приложение. Това до голяма степен се предопределя и от факта, че една не малка част от студентите постъпват в университетите, след като са натрупали огромни дефицити от знания по време на обучението си в средното образование, имат слаба грамотност и ниска обща култура, което силно

затруднява усвояването на знанията, преподавани във фундаменталните университетски дисциплини, в т. ч. и по дисциплината „Теория на счетоводството.“ Не на последно място, предвид новите реалности и тенденции в университетското образование, учебното време, изразено в брой учебни часове за които студентите трябва да получат бакалавърска степен по икономика е намалено, което води до намаляване и на хорариума и на фундаменталните учебни дисциплини. Последното поставя пред ръководствата на университетите редица предизвикателства, свързани с постигането на баланс между фундаменталните и профилирани учебни дисциплини, които да бъдат включени в учебните планове на отделните икономически специалности.

INTERACTIVE MULTIMEDIA WEB-LINKED PRESENTATION FOR MATHEMATICAL ANALYSIS TRAINING ON THE TOPIC OF ASYMPTOTES

Chief Assist. Prof. Anna Lecheva, PhD
University of Ruse, Bulgaria

Abstract: *This paper describes the interactive multimedia internet-linked presentation on the topic of Asymptotes, which is part of the Higher Mathematics curriculum. It aims to popularize and multiply good practices in the field of innovative educational technologies and didactic models in the fundamental sciences. Recommendations from the Innovative Educational Technologies Handbook (Ivanova et al., 2022) have been used, which has been written and issued as part of the National program for improving the competencies among lecturers in the public higher education institutions that are preparing future teachers (2021). This paper focuses on the digital transformation of traditional Mathematics teaching in accordance with the expectations and the predispositions of the digital generation of pupils and students, which is used to receiving internet multimedia information through different interactive devices.*

Keywords: *Digital education; Interactive presentation; Mathematical analysis; Asymptotes*

JEL code: *I2*

ИНТЕРАКТИВНА МУЛТИМЕДИЙНА ИНТЕРНЕТ СВЪРЗАНА ПРЕЗЕНТАЦИЯ ЗА ОБУЧЕНИЕ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ ПО ТЕМАТА АСИМПТОТИ

Гл. ас. д-р Анна Лечева
Русенски университет, България

Въведение

Математическият анализ е част от дисциплината Висша математика, която е фундаментална в обучението по всички технически и икономически специалности във висшето образование. Традиционно тя се възприема като „барьерна“ дисциплина, поради недостатъчната математическа подготовка от училищния курс. Дисциплината е включена като задължителната в учебния план на студентите в първи курс, първи семестър, ОКС бакалавър. Успешното полагане на изпита по Висша математика представлява предизвикателство както за студентите, така и за преподавателите.

За справяне с това предизвикателство е необходимо традиционното обучение да претърпи дигитална трансформация, за да отговори на нагласите на дигиталното поколение ученици и студенти, което е свикнало да получава от интернет мултимедийна информация чрез различни интерактивни устройства (Ivanova et al., 2022). Адаптирането на образователната система включва ефективното използване на информационни и комуникационни технологии (ИКТ) с цел по-лесно възприемане, покриване на очакванията и събуждане на интереса у студентите към фундаменталните науки.

Планът за действие на Европейската комисия (ЕК) в областта на цифровото образование 2021-2027г. представя възможности за подобряване на качеството и количеството на обучението във връзка с цифровите технологии (ЕС, 2021). Той дава подкрепа на цифровизацията на методите на преподаване и обучение посредством предоставяне на подходяща инфраструктура за приобщаващо дистанционно обучение във връзка с пандемията от COVID-19.

Въз основа на този План за действие на ЕК е разработена Стратегията за развитие на висшето образование в Република България за периода 2021-2030г., която включва и всеобща дигитализация и развитие на образователните системи, които допълват или са алтернативи на класическото висше образование (Държавен вестник, брой 2 от 08.01.2021г., т.2.3.).

Целта на настоящата публикация е популяризиране и мултиплициране на добрите практики в областта на иновативните образователни технологии и дидактически модели.

Основната хипотеза е, че фундаменталната дисциплина Висша математика и в частност разделът Математически анализ може да бъде представена по интересен и лесен за усвояване начин на студенти и на ученици с профил Математика в съответствие с тяхните нагласи и възприятия в сферата на ИКТ.

Разработена е интерактивна мултимедийна интернет свързана презентация по темата **Асимптоти**, която е част от учебната програма по дисциплината *Висша математика 1*, включена в учебните планове на повечето специалности в Русенски университет ([2022](#)).

Темата **Асимптоти** е част и от Модул 3. *Практическа математика* от учебната програма за профилирана подготовка по Математика в Р България ([MON, 2022](#)).

1. Петстепенен модел на обучение по Математика, базиран на конструктивизма и интерактивността

Темата **Асимптоти** е представена съобразно Петстепенния модел на обучение по Математика, базиран на конструктивизма и интерактивността, предложен от А. Лечева (Lecheva, 2021).

Моделът е разработен на база основните принципи на конструктивизма и интерактивността в преподаването, следва Пирамидата на ученето ([Learning pyramid, 2021](#)) и включва петте степени, показани на Фиг.1.

На **първо ниво** преподавателят дава определения на основните понятия по темата, формулира теореми, твърдения и следствия. Това е пасивно ниво, на което обучаваните навлизат в тематиката.

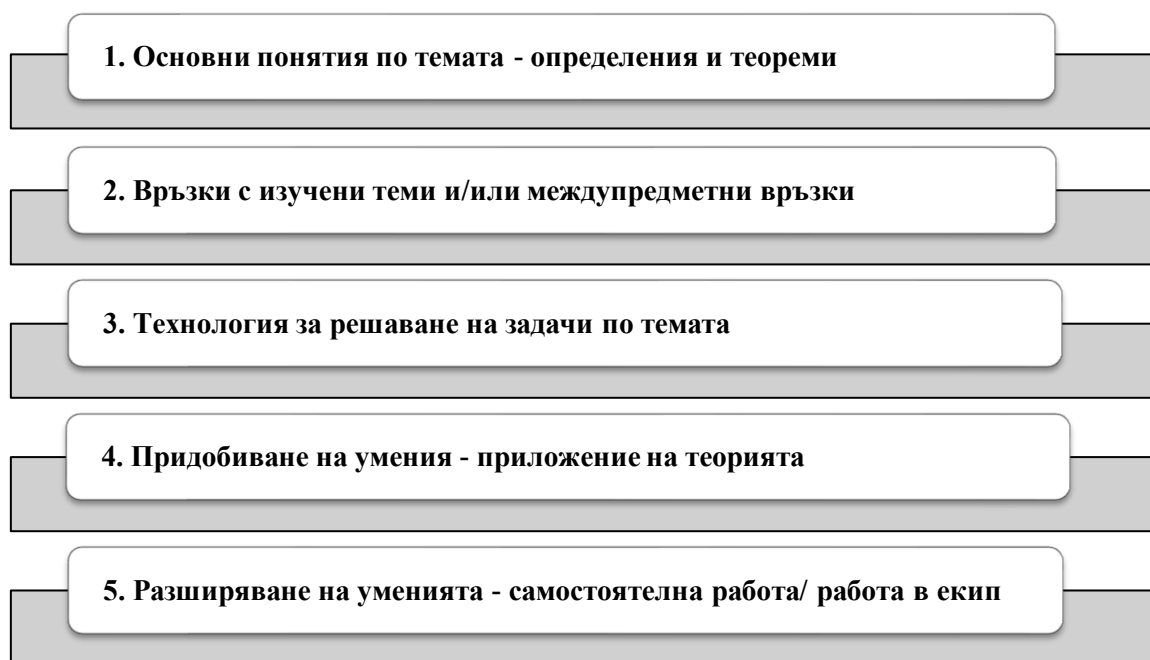
На **второ ниво** преподавателят обвързва новата тема с познати и изучени теми и задава междупредметни връзки, ако има такива. Целта е обучаваните да осмислят по-лесно новите понятия, като ги свързват с нещо познато. Това е пасивно ниво.

На **трето ниво** преподавателят демонстрира методи, показва технологията за решаване на конкретни задачи по темата, използва формули и таблици. Демонстрацията е първото активно ниво според Пирамидата на ученето.

На **четвърто ниво** обучаваните дискутират и обсъждат различни задачи, подбрани от преподавателя, предлагат решения, прилагат новоусвоените техники

под ръководството на преподавателя и анализират получените резултати. Това е активно ниво.

На **пето ниво** обучаваните решават задачи по темата самостоятелно. Преподавателят е пасивен - отговаря на възникнали въпроси, дава насоки и предложения, получава обратна връзка (рефлексия) чрез анализиране и дискутиране на получените резултати. За обучаваните това ниво е най-ефективното според Пирамидата на ученето. Те прилагат на практика наученото и задълбочават нивото на разбиране по темата.



Фиг.1. Петстепенен модел на обучение по Математика
Източник: Лечева А. (Lecheva, 2021)

2. Интерактивна, мултимедийна и интернет свързана презентация по темата Асимптоти

В първо ниво на Петстепенния модел, което е пасивно ниво, преподавателят има възможност да използва разнообразни иновативни техники и технологии и би могъл да поднесе теоретичния материал под формата на презентация, текстов документ в електронен формат, аудио-видео материал, предварително изготвен от него или от външен автор.

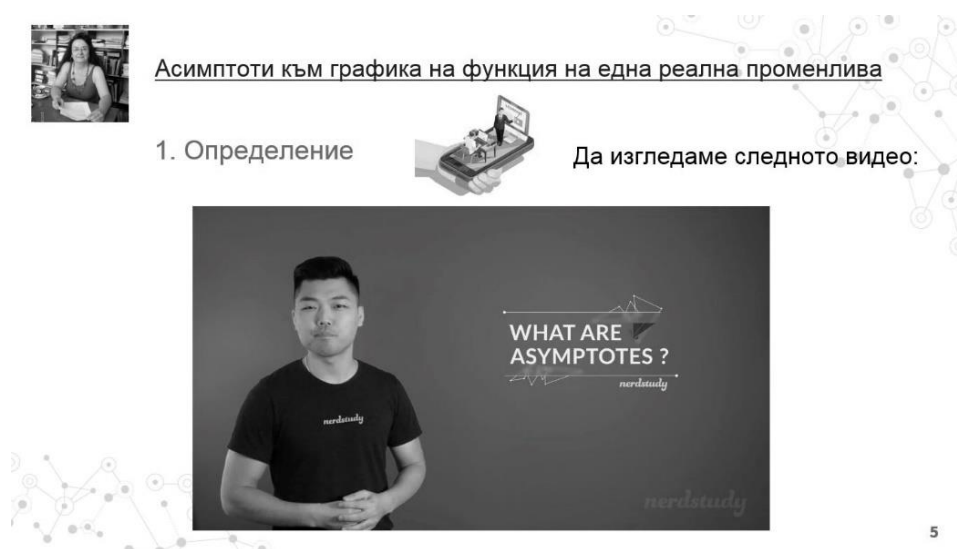
Независимо от конкретната техника на преподаване и използваните технологии, необходимо е обучаемите да получат основните теоретични познания по темата.

За обучението по темата **Асимптоти** е разработена интерактивна, мултимедийна и интернет свързана презентация. Тя е информативна и интересна за дигиталното поколение ученици и студенти. При разработването ѝ са спазени указанията от Наръчника по иновативни образователни технологии (Ivanova et al., 2022), който е написан и издаден в изпълнение на Националната програма за повишаване компетентностите на преподавателите от държавните висши училища, подготвящи бъдещи учители (National program for improving the

competencies among lecturers in the public higher education institutions that are preparing future teachers, 2021).

Някои конкретни препоръки са:

- Слайдовете на презентацията трябва да следват строга логическа последователност и да са издържани в един стил;
- Още с първите слайдове да бъде завладяно вниманието на аудиторията;
- На всеки слайд, при възможност, да има някакво изображение – чертеж, схема, снимка, фигура, графика и др. и съответен текст към него;
- Ако изображенията на даден слайд са две или повече, то те трябва да се появяват на екрана едно след друго, за да могат да бъдат осмислени;
- Ако е наложително на даден слайд да има повече текст, то той трябва да се показва последователно, на малки логически свързани порции, като е желателно съседните порции текст да са в различен цвят, за да се отличават една от друга;
- Когато лекторът говори по даден слайд, той първо трябва да прочете или преразкаже написания на него текст и след това да добави още информация, ако това е необходимо;
- Презентацията е интерактивна и интернет-свързана, ако в нея се добавят някои от следните елементи:
 - кратко филмче или анимация по темата (фиг.2.);
 - хипервръзка към сайт в интернет с полезна информация по темата на презентацията;
 - мисъл на известен човек, касаеща съответната област;
 - афоризъм, известен цитат или кратък академичен виц, придружен с подходящо анимирано изображение или видео и др. (фиг.3.)



Асимптоти към графика на функция на една реална променлива

1. Определение

Да изгледаме следното видео:

WHAT ARE ASYMPTOTES ?

nerdstudy

5

Фиг. 2. Слайд с кратко обучително видео по темата Асимптоти



Асимптоти към графика на функция на една реална променлива

Нещо любопитно:
Как са възникнали
символите в математиката?

<https://www.youtube.com/watch?v=eVm063xmnow>



21

Фиг. 3. Слайд с хипервръзка към кратко любопитно видео

- От значение за информативността и лесното възприемане от аудиторията е подходящият избор на следните технически елементи:
 - фон на слайдовете – трябва да бъде светъл, релефен и неутрален, за да не доминира и по възможност да кореспондира с предмета на дисциплината;
 - шрифт на текста – препоръчително е да бъде несерифен, за да се вижда по-ясно и от голямо разстояние, например Arial;
 - големина на буквите – да е достатъчна, за да се чете текста и от последния ред на залата при традиционно обучение;
 - цвят на текста – трябва да контрастира на фона, като е задължително да се използват топли и студени цветове от една гама; студените цветове да преобладават, защото топлите действат разсейващо и дори приспивно;
 - ефекти – използват се умерено, за да не се отклонява вниманието на аудиторията;
- Научно доказано е, че музиката на Моцарт е като допинг за мозъка и подобрява умствените способности на обучаемите. Препоръчително е подходяща музика да звучи преди началото на презентацията и / или по време на междучасието (Ivanova et al., 2022).

Спазени са и някои допълнителни правила за създаване на презентация за дистанционно обучение:

- използван е Slide Size: Widescreen (16:9), за да се запълни целия екран при стартиране на презентацията;
- първият и последният слайд са информативни и съдържат информация за лектора: академична длъжност, научна степен, **име и фамилия**, институция на автора, данни за контакт с него и др. (фиг.4.);

- на всеки междинен слайд, в някой от ъглите е препоръчително да присъства снимка на лектора, на която той е приветлив, усмихнат и предразполагащ обучаемите (фиг. 5.).



Фиг. 4. Първи слайд на презентацията с информация за лектора



Асимптоти към графика на функция на една реална променлива

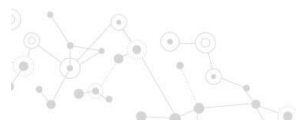
4. Изчертаване върху координатна система в равнината

Намирането на асимптоти към графиката на функция на една реална променлива има връзка с някои вече изучени теми.

Нужно е да си припомним:



- Изобразяване на точки върху числовата ос.
- Изобразяване на точки върху координатна система в равнината.
- Уравнение на права през две точки.
- Полиноми.
- Граница на функция. Свойства.
- Основни граници.



13

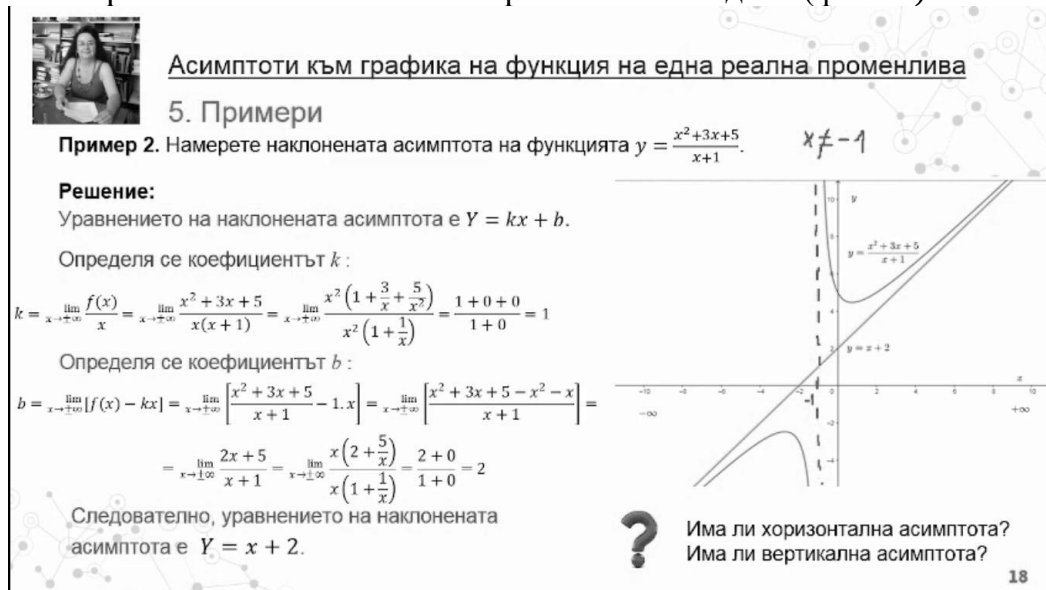
Фиг. 5. Междинен слайд по темата Асимптоти

3. Видео-лекция

За провеждането на дистанционно обучение (синхронно или асинхронно) по темата **Асимптоти** е записана видео-лекция на база разработената презентация. Използвана е програмата-рекордер Open Broadcaster Software (OBS Studio).

Видео-лекцията е публикувана в канала www.youtube.com и е достъпна на адрес <https://youtu.be/0rSeqLT6q1U>.

Използвана е възможността на PowerPoint за писане върху слайдовете с писалка (Pen), която позволява на преподавателя да дава допълнителни пояснения относно теорията или технологията за решаване на задачи (фиг. 6.).



Фиг. 6. Използване на възможността на PowerPoint за писане върху слайдовете с писалка (Pen) при решаването на конкретна задача

Заклучение

Целта на настоящата статия е популяризиране и мултиплициране на добрите практики в областта на иновативните образователни технологии и дидактически модели.

Доказана е основната хипотеза на автора, че фундаменталната дисциплина Висша математика и в частност разделът Математичен анализ може да бъде представена по интересен и лесен за усвояване начин на студенти и на ученици с профил Математика в съответствие с тяхните нагласи и възприятия в сферата на ИКТ.

Разработена е интерактивна мултимедийна интернет свързана презентация по темата **Асимптоти**, която е част от учебната програма по дисциплината *Висша математика 1*, *Математичен анализ 1* и Модул 3. *Практическа математика* от учебната програма за профилирана подготовка по Математика в Р България.

Предстои апробиране на предложения иновативен метод на преподаване през учебната 2022/2023г. По метода на директното пряко групово анкетиране с предварително структуриран въпросник ще бъде събрана информация за ефекта, отношението и удовлетвореността на обучаемите. Резултатите ще бъдат анализирани и публикувани в следващи изследвания на автора.

Докладът е подкрепен от **Проект 2022-ФПНО-03** на Русенски университет.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. *Darzhaven vestnik* (08 January 2021), broj 2, t.2.3
2. EC (2021). *Digital education action plan*. Available at: <https://ec.europa.eu/education/education-in-the-eu/digital-education-action-plan.bg>
3. Ivanova et al. (2022). *Innovative Educational Technologies Handbook* Available at: <https://www.mon-nmuciot.bg/virtualLibrary.html>
4. *Learning pyramid* (October, 2021). Available at: <https://www.educationcorner.com/the-learning-pyramid.html>
5. Lecheva A. (2021). *A five-level model of teaching mathematics based on constructivism and interactivity*, PROCEEDINGS OF UNIVERSITY OF RUSE, volume 60, book 6.4, pp. 59-64, ISBN: 2603-4123. Available at: <https://conf.uni-ruse.bg/bg/docs/cp21/6.4/6.4-9.pdf>
6. Lecheva A., *Video-lekcia*. Available at: <https://youtu.be/0rSeqLT6q1U>
7. MON (2022). Available at: www.mon.bg
8. *National program for improving the competencies among lecturers in the public higher education institutions that are preparing future teachers* (2021). Available at: <https://web.mon.bg/bg/101030>
9. *University of Ruse* (2022). Available at: www.uni-ruse.bg

USING SIMULATIONS IN EXCEL TO EVALUATE THE ESTIMATORS OF THE EXPECTATION AND THE VARIANCE

Chief Assistant Professor Deyan Mihaylov, PhD

University of Economics-Varna, Bulgaria

Abstract: Unbiased estimators of the expected value and the variance are well known in statistical theory. This paper presents an approach for experimental validation of the theoretical formulas. It is assumed that we have the entire population or a representative sample and the expected value and the variance are known. Re-samples are taken from the population and for each re-sample mean values, biased and unbiased estimates of variance are calculated. The experiment shows that the mean of sample variance is equal to the population variance. The re-samples are simulated in MS Excel.

Keywords: MS Excel; Re-sample; Simulations; Unbiased Estimators

JEL code: C60

ИЗПОЛЗВАНЕ НА СИМУЛАЦИИ В СРЕДАТА НА MS EXCEL ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ОЦЕНКИТЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКОТО ОЧАКВАНЕ И ДИСПЕРСИЯТА

Гл. ас. д-р Деян Михайлов

Икономически университет – Варна, България

Въведение

Най-често използваните характеристики на вероятностните разпределения са математическото очакване и дисперсията. Оценяването им по извадки от генералната съвкупност е важна задача на дескриптивната статистика. Оценка на параметрите трябва да бъдат състоятелни, неизместени, ефективни и достатъчни.

В настоящата работа ще бъде разгледано само свойството неизместеност. По определение неизместена е тази оценка, чието математическо очакване е равно на оценявания параметър. С други думи, ако сме направили много извадки от една генерална съвкупност, средната на оценката на параметъра на всяка извадка ще клони към самия параметър от генералната съвкупност.

Ако извадката се състои от единиците $x_1, x_2, \dots, x_N$, то се формулират следните твърдения:

Твърдение 1: Неизместена оценка на математическото очакване на генералната съвкупност е средната на извадката

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i . \quad (1)$$

Твърдение 2: Величината

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (2)$$

е изместена оценка на дисперсията, а величината

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (3)$$

е неизместена оценка на дисперсията.

Доказателствата на двете твърдения са широко известни (Kenney, 1947). В настоящата работа ще покажем верността им, като проведем симулационен експеримент. Реализацията на експеримента е в средата на MS Excel. Този продукт притежава вградени функции, които позволяват създаване на симулации (Guerrero, 2019). Същевременно потребителският интерфейс дава много добри възможности за наблюдаване на процеса на симулиране.

Модел на изследването:

Нека допуснем, че разполагаме с цялата генерална съвкупност. Тогава точните стойности на математическото очакване и дисперсията могат да се получат по формулите (1) и (2). Ако от тази генерална съвкупност направим извадка и използваме отново формулите (1) и (2), в общия случай изчислените стойности ще се отклоняват от истинските математическо очакване и дисперсия. За да покажем, че оценките са неизместени или изместени, е необходимо да направим много случайни извадки, да изчислим оценките за всяка извадка и да намерим средната стойност на оценките. Ако тя е близка до параметрите на генералната съвкупност, можем да считаме, че оценката е неизместена.

Изборът на всеки елемент, включен в извадката, трябва да бъде независим от избора на останалите. За да се осигури независимост на избора, извадката трябва да е с връщане, т.е. при изтегляне на елемента, той се регистрира, след това се връща в генералната съвкупност и може да бъде избран отново. В противен случай вероятността за избор на i -тия елемент е събитие, зависещо от избора на първия, втория, ..., $i-1$ -вия елемент.

Извличането на извадка с обем k от дадено множество с мощност, равна на N , без значение дали става дума за генерална съвкупност или за извадка от генерална съвкупност, не представлява трудност от алгоритмична гледна точка. Един възможен начин е да се номерират елементите на множеството от 1 до N . След това се получава набор от k случайни цели числа в интервала от 1 до N и се извличат елементите със съответните номера.

Математическото очакване на квадрата на грешката при експеримента е (Brandimarte, 2014):

$$E(\bar{x} - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{N} = \frac{DX}{N}. \quad (4)$$

Ако разполагаме с данни за DX , можем да установим такава стойност на броя на извадките, при която грешката да бъде достатъчно малка. Необходимият брой на извадките може да бъде значителен. За да намалим, например, грешката 10 пъти, трябва да увеличим броя на експериментите 100 пъти. Това изисква използването на компютърна техника и подходящ софтуер. В повечето програмни среди (включително в Excel) има вградени генератори на псевдослучайни числа, които дават възможност за генериране на извадки.

Числен пример:

Нека генералната съвкупност има биномно разпределение с параметри $p = 0,5$ и $n = 4$. Тя може да се моделира с числата 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4. Математическото очакване на генералната съвкупност е

$$EX = np = 2,$$

а дисперсията

$$DX = np(1 - p) = 1.$$

От генералната съвкупност се извличат с връщане извадки с обем $k = 7$.

Ако направим, например, 1000 извадки, по формула (4) получаваме

$$E(\bar{x} - \mu)^2 = \frac{1}{1000} \rightarrow E|\bar{x} - \mu| = \frac{1}{\sqrt{1000}} = 0,032$$

На фиг. 1 е показан работен лист на Excel, в който е реализирано симулирането на оценките на математическото очакване и дисперсията.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$X \sim Bi(0,5;4)$				№ на извадка		1	2	3
2	№	X			Номера на изтеглените стойности		4	3	7
3	1	0					14	2	3
4	2	1					11	3	15
5	3	1					4	10	13
6	4	1					5	1	9
7	5	1					10	10	1
8	6	2					14	12	4
9	7	2			Извадки (с връщане)		1	1	2
10	8	2					3	1	1
11	9	2					2	1	3
12	10	2					1	2	3
13	11	2					1	0	2
14	12	3					2	2	0
15	13	3					3	3	1
16	14	3			Средни оценки	Оценки			
17	15	3			2,022714286	$\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$	1,8571	1,4286	1,7143
18	16	4							
19	EX=	2			0,856816327	$s^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$	0,6939	0,8163	1,0612
20	DX=	1			0,999619048	$\hat{s}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$	0,8095	0,9524	1,2381
21									
22				$D(x) =$	0,134373537				
23				$D(s^2) =$	0,17427496				
24				$D(\hat{s}^2) =$	0,237207584				

Фигура 1. Симулиране на извадки
Източник: Собствена разработка.

В клетки A3:B18 са въведени номерата на елементите от генералната съвкупност от 1 до 16 и стойностите на самите елементи. В клетки B19 и B20 са изчислени математическото очакване и дисперсията на генералната съвкупност. Използвани са вградените функции AVERAGE(B3:B18) и VAR.P(B3:B18).

В клетки G2:G8 се генерират случайни числа с вградената функция RANDBETWEEN(1:16).

В клетки G9:G15 се извличат стойностите на елементите от генералната съвкупност. Използва се (за клетка G9 вградената функция VLOOKUP(G2;\$A\$3:\$B\$18;2;FALSE). Формулата се копира в клетки G10:G15.

В клетки G17, G19 и G208 се пресмятат оценките по формулите (1-3), като се използват вградените функции AVERAGE(G9:G15), VAR.P(G9:G15) и VAR.S(G9:G15).

Формулите от колона G се копират в колони H, I, J, ..., ALR, за да се получат 1000 симулации.

В клетки E17, E19 и E20 се пресмятат средните стойности на оценките от извадките. В клетки E22, E23 и E24 са пресметнати дисперсиите на средните стойности.

Оценките на отделните извадки може да са далече от истинските стойности на математическото очакване и дисперсията, което се вижда на фиг. 1. При усредняването им, обаче

- средната стойност на оценките, получени по формула (1) е близка до математическото очакване на генералната съвкупност;
- средната стойност на оценките, получени по формула (3) е близка до дисперсията на генералната съвкупност.
- средната стойност на оценките, получени по формула (2) е значително по-ниска от дисперсията на генералната съвкупност.

С последователно натискане на функционален клавиш F9 се стартира нова симулация. На фиг. 2 са показани резултатите от оценка на параметрите от няколко последователни симулации.

16	14	3			Средни оценки	Оценки
17	15	3			2,010285714	$\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$
18	16	4				
19	EX=	2			0,858938776	$s^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$
20	DX=	1			1,002095238	$\hat{s}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$
21						
22					D(x) = 0,139094523	
23					D(s ²) = 0,201677836	
24					D(ŝ ²) = 0,274505944	
25						

16	14	3			Средни оценки	Оценки
17	15	3			1,996714286	$\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$
18	16	4				
19	EX=	2			0,849632653	$s^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$
20	DX=	1			0,991238095	$\hat{s}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$
21						
22					D(x) = 0,139782047	
23					D(s ²) = 0,191462006	
24					D(ŝ ²) = 0,260601064	
25						

16	14	3			Средни оценки	Оценки
17	15	3			2,015285714	$\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$
18	16	4				
19	EX=	2			0,836693878	$s^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$
20	DX=	1			0,976142857	$\hat{s}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$
21						
22					D(x) = 0,127342669	
23					D(s ²) = 0,178677635	
24					D(ŝ ²) = 0,243200114	
25						

16	14	3			Средни оценки	Оценки
17	15	3			2,015285714	$\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$
18	16	4				
19	EX=	2			0,836693878	$s^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$
20	DX=	1			0,976142857	$\hat{s}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$
21						
22					D(x) = 0,127342669	
23					D(s ²) = 0,178677635	
24					D(ŝ ²) = 0,243200114	
25						

Фигура 2. Резултати от симулации при обем на извадката равен на 7

Източник: Собствена разработка.

В работния лист е въведена генерална съвкупност, съдържаща само 16 елемента. Вероятността за избор на всеки един от тях точно съответства на вероятността за избор на случайна величина, която има биномно разпределение с

параметри $p = 0,5$ и $n = 4$. В примера обемът на извадката е 7. При извадка с връщане можем да увеличим обема на извадката и тя да достигне обема на генералната съвкупност и дори да го надвиши. При това математическото очакване на параметрите не се изменя, но дисперсията им намалява (фиг. 3).

34				Средни оценки	Оценки	34				Средни оценки	Оценки
35				1,99	$\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$	35				2,001	$\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$
36						36					
37				0,935117188	$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$	37				0,915773438	$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$
38				0,997458333	$\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$	38				0,976825	$\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$
39						39					
40				$D(\bar{x}) = 0,067725538$		40				$D(\bar{x}) = 0,069044607$	
41				$D(s^2) = 0,094191083$		41				$D(s^2) = 0,092119863$	
42				$D(\hat{s}^2) = 0,107168521$		42				$D(\hat{s}^2) = 0,104811933$	

34				Средни оценки	Оценки	34				Средни оценки	Оценки
35				2,00775	$\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$	35				2,0045625	$\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$
36						36					
37				0,942804688	$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$	37				0,921707031	$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$
38				1,005658333	$\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$	38				0,983154167	$\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$
39						39					
40				$D(\bar{x}) = 0,067452703$		40				$D(\bar{x}) = 0,072281934$	
41				$D(s^2) = 0,100396078$		41				$D(s^2) = 0,097814324$	
42				$D(\hat{s}^2) = 0,114228427$		42				$D(\hat{s}^2) = 0,111290964$	

Фигура 3. Резултати от симулации при обем на извадката равен на 16

Източник: Собствена разработка.

Увеличаването на обема на извадката до обема на генералната съвкупност (и повече) е близко до метода на бутстрапинга (bootstrapping) (Efron & Tibshirani, 1993). При класическият бутстрапинг разполагаме с извадка от неизвестна генерална съвкупност. В настоящия пример работим с извадка, която е абсолютно представителна, т.е. с точен модел на генералната съвкупност.

Изводи

Направеният експеримент потвърждава теоретичните постановки за изместените и неизместените оценки на математическото очакване и дисперсията на генералната съвкупност. Подобни модели биха могли да се използват в преподаването.

Трябва да се има предвид, че осигуряването на представителност при други параметри на биномното разпределение или при други разпределения изисква по-голям обем на представителната извадка. Ако, например, параметрите на биномното разпределение са $p = 0,6$, $n = 4$, минималният модел на случайната величина трябва да бъде с обем 625 (16 нули, 96 единици, 256 двойки, 256 тройки и 81 четворки). При такива параметри на експеримента се налага използване на други софтуерни инструменти. Подходящи за използване могат да бъдат Python или R (Bruce, Bruce, & Gedeck, 2017).

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Brandimarte, P. (2014). *Handbook in Monte Carlo Simulation*. Hoboken: John Wiley & Sons.
2. Bruce, P., Bruce, A., & Gedeck, P. (2017). *Practical Statistics for Data Scientists*. O'Reilly.
3. Efron, B., & Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. New York: Chapman&Hall.
4. Guerrero, H. (2019). *Excel Data Analysis: Modeling and Simulation* (2nd изд.). Springer.
5. Kenney, J. F. (1947). *Mathematics of Statistics*. New York: D. Van Nostrand.

A COMPARISON BETWEEN ENTRY LEVEL TEST IN MATHEMATICS OF THE FIRST-YEAR STUDENTS IN UNIVERSITY OF ECONOMICS-VARNA DURING DIFFERENT ACADEMIC YEARS

Chief Assistant Professor Deyan Mihaylov, PhD
University of Economics-Varna, Bulgaria

Abstract: *Mathematics is a fundamental subject at the University of Economics-Varna. It is supposed that the first-year students have skills in maths according to high school programs. Unfortunately there are gaps in their mathematical knowledge. It is necessary to check the entry level of the students. This paper presents a study of students' skills. In different academic years the first-year students make the same test. The results show improvement in average entry level test from 2014 to 2021. The Chi-Square test is used*

Keywords: *Mathematical Skills; Entry Level; Testing.*

JEL code: *C60*

СРАВНЕНИЕ МЕЖДУ ВХОДНОТО НИВО ПО МАТЕМАТИКА НА СТУДЕНТИТЕ-ПЪРВОКУРСНИЦИ ОТ ИКОНОМИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА ПРЕЗ РАЗЛИЧНИ УЧЕБНИ ГОДИНИ

Гл. ас. д-р Деян Михайлов
Икономически университет – Варна, България

Въведение

За важността на фундаменталната подготовка по математика говори фактът, че тя е обект на особено внимание в европейски мащаб. В своя Препоръка 2018/С 189/1 от 22 май 2018 г. Съветът на Европейския съюз определя Набор от ключови компетентности, необходими за личностна реализация, здраве, пригодност за заетост и социално приобщаване. като основни умения се посочват езиковата и математическа грамотност и основните цифрови умения (Council of the EU, 2018).

Математиката е една от фундаменталните дисциплини в учебните планове за подготовка на бакалаври по професионално направление „Икономика”. Предполага се, че завършилите средно образование притежават необходимите знания и умения в съответствие с учебните програми по математика за средните училища. Учебната програма по математика в Икономически университет – Варна има за цел достигане на определено желано състояние, като се надграждат получените в средното училище знания и умения. Във връзка с това е важно да се знае до каква степен са усвоени тези знания и умения.

Същност на изследването и резултати:

За оценяване на входното ниво по математика сред част от студентите-първокурсници по специалности от професионално направление „Икономика” в Икономически университет – Варна, през 2014 година беше проведен тест, съдържащ 30 задачи от следните области на елементарната математика:

- действия с рационални дроби (три задачи с отворен отговор);
- действия с десетични дроби (седем задачи с отворен отговор);
- линейни уравнения с едно неизвестно (четири задачи с отворен отговор);
- системи от две линейни уравнения с две неизвестни (три задачи с отворен отговор);
- квадратни уравнения (две задачи с отворен отговор);
- степенуване и коренуване (пет задачи със затворен отговор);
- линейни неравенства и системи линейни неравенства (три задачи с отворен отговор);
- тъждества (три задачи със затворен отговор).

Проверката имаше две цели

- Да се придобие представа какво е реалното състояние на обучаемите, какви знания и умения притежават те, какво трябва да се направи, за да се запълнят пропуските, и до каква степен може да се очаква те да усвоят планирания съгласно учебната програма материал.
- Обучаемите да разберат, че имат сериозни пропуски, и че трябва да положат усилия, за да компенсират пропуснатото (Михайлов, 2015).

През 2021 и 2022 г. същият тест беше използван за проверка на входното ниво на студенти-първокурсници. Тъй като тестовите въпроси бяха същите, има възможност да се сравни нивото на различните поколения студенти и да се направят изводи относно настъпили промени.

Извадката не е представителна за университета. Изследвани са студенти от две специалности. През 2014 година с теста са проверени знанията на 57 студента, през 2022 – на 51 и през 2022 г – на 37.

За оценяване на подготовката на студентите е възприет следният критерий: студентът притежава удовлетворителни умения в дадена област, ако верните отговори на въпросите от тази област са 50% и повече.

В таблица 1 са показани обобщени данни от проведените тестове.

Таблица 1

Обобщени данни от проверката на подготовката по математика на студенти-първокурсници

Брой области, в които студентите имат удовлетворителни умения	Години Брой студенти		
	2014	2021	2022
0	20	5	4
1	10	7	9
2	12	8	6
3	4	10	2
4	3	10	5
5	5	5	5
6	0	1	2
7	3	3	3
8	0	3	1
Общ брой	57	52	37

Източник: Собствена разработка.

За всяка година е изследвана извадка от студенти. С теста χ^2 може да се провери дали извадките са от една и съща или от различни генерални съвкупности.

Приема се нулевата хипотеза, че извадките са от една и съща генерална съвкупност. Алтернативната хипотеза е, че извадките са от различни генерални съвкупности. Избира се ниво на значимост $\alpha = 0,05$.

Построява се кръстосана таблица за 2014 и 2021 година (табл. 2).

Таблица 2

Кръстосана таблица за оценяване на зависимостта между подготовката по математика на приетите през 2014 и 2021 години

Години	Подготовка			Общо
	Слаба	Средна	Добра	
2014	$n_{11} = 42$	$n_{12} = 12$	$n_{13} = 33$	$n_{1*} = 57$
2021	$n_{21} = 20$	$n_{22} = 25$	$n_{23} = 7$	$n_{2*} = 52$
Общо	$n_{*1} = 62$	$n_{*2} = 37$	$n_{*3} = 10$	$n = 109$

Статистиката

$$\chi^2 = n \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \frac{n_{ij}^2}{n_{i*} \cdot n_{*j}} - 1 \right). \quad (1)$$

има разпределение χ^2 с $(2 - 1)(3 - 1) = 2$ степени на свобода (Кобзарь, 2006).

При прилагане на формула (1) се получава $\chi^2 = 13,77$. Критичната стойност $\chi_{1-0,05}^2(2) = 5,99$. Изчислената статистика надвишава критичната стойност и това дава основание за отхвърляне на нулевата хипотеза с вероятност за грешка 0,05. Извадките са от различни генерални съвкупности. Приетите през 2021 година студенти имат по-добра подготовка по математика от приетите през 2014.

Аналогично сравняваме подготовката на приетите през 2021 и 2022 години (табл. 3).

Таблица 3

Кръстосана таблица за оценяване на зависимостта между подготовката по математика на приетите през 2021 и 2022 години

Години	Подготовка			Общо
	Слаба	Средна	Добра	
2014	$n_{11} = 20$	$n_{12} = 25$	$n_{13} = 7$	$n_{1*} = 52$
2021	$n_{21} = 19$	$n_{22} = 12$	$n_{23} = 6$	$n_{2*} = 37$
Общо	$n_{*1} = 39$	$n_{*2} = 37$	$n_{*3} = 13$	$n = 89$

При прилагане на формула (1) се получава $\chi^2 = 2,205$. Критичната стойност $\chi_{1-0,05}^2(2) = 5,99$. Изчислената статистика не надвишава критичната стойност, т.е. няма основание за отхвърляне на нулевата хипотеза. Извадките са от една и съща генерална съвкупност. Приетите през 2021 и 2022 година студенти имат еднаква подготовка по математика.

Изводи

Анализът на емпиричните данни показва, че приетите през 2021 г. в наблюдаваните специалности студенти имат по-добра подготовка по математика от приетите през 2014 г. Не се забелязва значима разлика между подготовката на приетите през 2021 и 2022 години.

Резултатите от Програмата за международно оценяване на учениците (PISA), организирана от Организацията за икономическо сътрудничество и развитие показват, през 2009 г. средният резултат по математика е бил 428 точки, през 2012 – 439, през 2015 – 441 и през 2018 – 436 (Петрова, 2016), (OECD, 2019). Това са резултатите на 15 годишните ученици, които 3-5 години след изследването постъпват в университетите. Не се забелязва значимо подобрение на подготовката на българските ученици. Следователно положителната промяна в подготовката на студентите в наблюдаваните специалности се дължи на други фактори (например на по-добра рекламна стратегия).

Направените изводи могат да се считат за валидни само за изследваните специалности. Както беше подчертано, извадката не е представителна за университета.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Council of the EU. (22 May 2018 r.). Council Recommendation 2018/C 189/01. *Official Journal of the European Union* , стр. 1-14.
2. OECD. (2019). *PISA 2018 Results (Volume 1) What Students Know and Can Do (Volume I)*. Paris: OECD Publishing.
3. Kobzar, A. I. (2006). *Prikladnaya matematicheskaya statistika dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov*. Moskva: MAIK.
4. Mihaylov, D. (2015). *Vkhodnoto nivo po matematika na studentite parvokursnitsi po spetsialnosti ot napravlenie Ikonomika. Matematikata kato fundamentalna i prilozhna nauka* (str. 391-399). Varna: Nauka i ikonomika.
5. Petrova, S. (2016). *Prirodnite nauki i tekhnologiite v uchilishteto na XXI vek. Rezultati ot uchastieto na Bŭlgariya v Programata za mezhhdunarodno otsenyavane na uchenitsite PISA 2015*. Sofiya: TSKOKUO.

COMPARISON BETWEEN NONLINEAR LEAST SQUARE METHOD AND LINEARIZATIONS OF SATURATION GROWTH MODEL

Chief Assistant Professor Deyan Mihaylov, PhD

University of Economics-Varna, Bulgaria

Abstract: The determination of the regression parameters is one of the tasks of regression analysis. They are easily obtained in the case of linear dependence. The nonlinear models require applying more complicated methods. To avoid this it is often recommended to use linearization of the regression equation. This paper shows that this approach leads to increase in the bias of regression parameters. The example of saturation-growth model of Michaelis-Menten equation is used. The parameters of the linearization plots of Lineweaver-Burk, Eadie-Hofstee and Hanes-Wolf are biased from the parameters which are determined by nonlinear least square method.

Keywords: Approximation; Least Square Method; Linearization; Saturation-Growth Model

JEL code: C60

СРАВНЕНИЕ МЕЖДУ НЕЛИНЕЙНИЯ МЕТОД НА НАЙ-МАЛКИТЕ КВАДРАТИ И ЛИНЕАРИЗАЦИЯТА НА ДРОБНО-ЛИНЕЕН РЕГРЕСИОНЕН МОДЕЛ

Гл. ас. д-р Деян Михайлов

Икономически университет – Варна, България

Въведение

Практическото използване на фундаменталните методи на математиката е свързано с прилагане на числени алгоритми за решаване на конкретни задачи. Обикновено достигането на точно решение е невъзможно или нецелесъобразно. Изследователят би трябвало да „изпитва щастие”, ако успее да достигне точност до десетия знак (Trefethen, 2011). Причините за отклоненията са различни. Самото представяне на числата в двоичен вектор с краен брой разряди обективно води до необходимост от закръгление (Burden, Faires, & Burden, 2014). Голяма част от изчислителните алгоритми са итеративни, като всяка итерация подобрява решението. Абсолютната точност, обаче, се достига при безкраен брой итерации, което е практически невъзможно. Като пример могат да се посочат методите за числено решаване на уравнения или системи. В много случаи входните данни са неточни поради несъвършенство на технологията на измерване на моделираните величини. Средствата за измерване и алгоритмите за обработка на опитните данни имат определена погрешност. Следователно се налага да се направи компромис с точността. Изниква обаче въпросът какъв трябва да е този компромис и до какво води той.

Известна е една задача-шега, показваща какви могат да бъдат последствията от приближенията. Дадена е система от две уравнения

$$\begin{cases} x + 10y = 11,1 \\ 10x + 101y = 111 \end{cases}$$

Решението на тази система е $x = 11,1$, $y = 0$.

Ако приемем, че дясната част на първото уравнение е приблизително равна на 11, се получава системата

$$\begin{cases} x + 10y = 11 \\ 10x + 101y = 111 \end{cases}$$

Решението ѝ е $x = 1$, $y = 1$.

Вижда се, че една минимална промяна (примерно използване на измервателен уред с по-нисък клас на точност) води до голяма промяна в резултата.

В пълна сила това важи и за апроксимацията на данни с моделираща функция. Една от задачите ѝ е да се определят параметрите на модела. В природните науки това са физически константи, които имат важно теоретично и практическо значение. Обикновено се използва методът на най-малките квадрати (Taylor, 2005). Разполагаме с n наблюдения върху две величини X и Y и се предполага наличието на зависимост между тях от вида $y = f(x, A)$, където A е вектор от параметри. За всяка двойка (x_i, y_i) се образува разлика $\varepsilon_i = y_i - f(x_i)$ и се търси минимума на сумата от квадратите на тези разлики:

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2 \rightarrow \min. \quad (1)$$

Когато $y = f(x, A)$ е линейна спрямо параметрите, приравнените на нула частни производни по параметрите формират система линейни уравнения, която се решава лесно и минимумът на функцията на грешката се определя точно. Ако моделът има грешки, те се дължат на грешки в измервателната апаратура, но не и в използвания математически алгоритъм.

Когато $y = f(x, A)$ не е линейна спрямо параметрите, задачата в общия случай се решава итеративно, като се използва нелинеен метод на най-малките квадрати, например чрез алгоритъма на Гаус-Нютон или на Левенберг-Маркуарт (Marquardt, 1963). В някои случаи апроксимиращата функция се преобразува чрез логаритмуване или чрез трансформация на зависимата и независимата променлива по такъв, че новата функция да стане линейна спрямо параметрите и след това се прилага обикновения метод на най-малките квадрати. Тези методи могат да дадат решения, близки до най-добрите приближения, но могат и значително да се отклоняват.

В настоящия доклад се разглежда линеаризирането на дробно-линейния регресионен модел. С конкретен пример се показва, че използването на различни линеаризирани преобразувания води до решения, които са с различни и то доста съществени отклонения от получените със съвременните методи.

Числен пример:

В биохимията се използва известното уравнение на Михаелис-Ментен, което дава връзка между концентрацията на субстрата и скоростта на биохимичната реакция (Johnson & Goody, 2011). Общият вид на уравнението, получено в началото на 20 век е

$$V = \frac{[S]}{[S] + k},$$

където $[S]$ е концентрацията на субстрата, k е константа, а V е безразмерна величина, представляваща относителната част от максималната скорост на реакция, т.е.

$$V = \frac{v}{V_{max}},$$

където v е точната скорост на реакцията.

При заместване се получава алтернативен запис на уравнението

$$v = \frac{[S]V_{max}}{[S] + k}, \quad (2)$$

който се използва в момента.

Дробно-рационалната функция в дясната част на уравнението е модел на насищане (saturation growth model). Действително, при увеличаване на концентрацията константата k (известна като константа на Михаелис-Ментен) става пренебрежимо малка и скоростта на реакцията клони към максималната, без да може да я надвиши.

Нека уравнението (2) бъде записано в по-привична форма:

$$y = \frac{xa_0}{x + a_1}, \quad (3)$$

Получената функция е нелинейна, но може да се сведе до линейна по няколко начина:

А) Графика (модел) на Лайнуивър-Бърк (Lineweaver & Burk, 1934).

Уравнението (3) се представя като се вземат реципрочните стойности на двете му части и се преобразува:

$$\frac{1}{y} = \frac{x + a_1}{xa_0} = \frac{x}{xa_0} + \frac{a_1}{xa_0} = \frac{1}{a_0} + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1}{x}. \quad (4)$$

Полага се:

$$\frac{1}{y} = Y; \quad \frac{1}{x} = X; \quad \frac{1}{a_0} = A_0; \quad \frac{a_1}{a_0} = A_1; \quad (5)$$

и се получава линейният модел

$$Y = A_0 + A_1X. \quad (6)$$

В) Графика (модел) на Еди-Хофсти (Eadie, 1942).

Привеждат се двете части на уравнението (3) под общ знаменател и се преобразува:

$$y(x + a_1) = xa_0 \rightarrow xy = xa_0 - a_1 \rightarrow y = a_0 - a_1 \frac{y}{x}. \quad (7)$$

Полага се

$$y = Y; \quad \frac{y}{x} = X; \quad a_0 = B_0; \quad a_1 = -B_1; \quad (8)$$

и се получава линейният модел

$$Y = B_0 - B_1 X . \quad (9)$$

С) Графика (модел) на Ханес-Уулф (Hanes, 1932).
Уравнението (3) се преобразува по следния начин:

$$y = \frac{x a_0}{x + a_1} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{a_0} x + \frac{a_1}{a_0} . \quad (10)$$

Полага се:

$$\frac{x}{y} = Y; \quad x = X; \quad \frac{1}{a_0} = C_1; \quad \frac{a_1}{a_0} = C_0; \quad (11)$$

и се получава линейния модел

$$Y = C_0 + C_1 X . \quad (12)$$

Използвани са експериментални данни за биохимична реакция (колони 2-3 на табл. 1).

Подробно е показано решението на модел А. За апроксимация с модела данните се преобразуват (графи 4 и 5 на табл. 1).

Таблица 1

Експериментални данни за скоростта на биохимична реакция

№	Изходни данни		Трансформирани данни	
	Концентрация x_i	Скорост на реакцията y_i	$X_i = \frac{1}{x_i}$	$Y_i = \frac{1}{y_i}$
1	2	3	4	5
1	2,856829	14,58342	0,350038	0,068571
2	5,005303	24,74123	0,199788	0,040418
3	7,519473	31,34551	0,132988	0,031902
4	22,101664	72,96985	0,045245	0,013704
5	27,769976	77,50099	0,036010	0,012903
6	39,198025	96,08794	0,025511	0,010407
7	45,483269	96,96624	0,021986	0,010313
8	203,784238	108,88374	0,004907	0,009184

Източник: (Ritz & Streibig, 2008)

При линейната апроксимация с модела (5) се получава $A_0 = 0,006747$; $A_1 = 0,175668$. t-тестът на Стюдънт показва, че коефициентите са статистически значими.

От полаганията (5) лесно се получават коефициентите на нелинейния модел:

$$a_0 = \frac{1}{A_0} = 148,217333 ; \quad a_1 = a_0 \cdot A_1 = 26,037048.$$

Точността на модела може да се оцени с величината на сумата от квадратите на отклоненията (табл. 2).

Таблица 2

Оценка на точността на модела $y = \frac{148,217333x}{x+26,037048}$

№	Концентрация x_i	Скорост на реакцията y_i	$\hat{y}_i = \frac{a_0 x_i}{x_i + a_1}$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
1	2	3	4	5
1	2,856829	14,58342	14,654717	0,005083
2	5,005303	24,74123	23,898727	0,709811
3	7,519473	31,34551	33,213105	3,487910
4	22,101664	72,96985	68,050215	24,202805
5	27,769976	77,50099	76,495437	1,011137
6	39,198025	96,08794	89,059864	49,393847
7	45,483269	96,96624	94,258655	7,331018
8	203,784238	108,88374	131,425408	508,126799
			Σ	594,268411

Източник: Собствена разработка.

Средната стойност $\bar{y} = 65,38487$. Ако приемем, че y не зависи от x и всички отклонения са случайни, сумата от квадратите на грешките е равна на 9427,716. При прилагането на модела грешката е 6,3% от първоначалната, което означава, че моделът обяснява 93,7% от измененията на зависимата променлива. Това позволява да се направи извода, че моделът е добър.

Аналогично се изследват моделите В и С.

Задачата се решава и с нелинейния метод на най-малките квадрати, като се използва вградената функция **nls()** от езика R (R Foundation).

Данните се въвеждат в масива **Data**:

Data

	x	y
1	2.856829	14.58342
2	5.005303	24.74123
3	7.519473	31.34551
4	22.101664	72.96985
5	27.769976	77.50099
6	39.198025	96.08794
7	45.483269	96.96624
8	203.784238	108.88374

Необходимо е да се зададат начални стойности на параметрите на модела. Използват се стойностите, получени при един от линейните модели, като се разчита, че те са близки до най-доброто възможно приближение.

```
>nls(y~a0*x/(x+a1),Data,start=list(a0=148,a1=26))
```

Nonlinear regression model

```
model: y ~ a0 * x/(x + a1)
```

```
data: Data
```

```
a0      a1
```

126.03 17.08

residual sum-of-squares: 234.4

Резултатите за моделите А, В, С и за нелинейния метод на най-малките квадрати са показани в табл. 3.

Таблица 3

Обобщени резултати за апроксимацията на опитните данни

Показател	Модел А	Модел В	Модел С	Нелинеен МНМК
1	2	3	4	5
Уравнение	$y = \frac{148,217x}{x + 26,037}$	$y = \frac{137,713x}{x + 22,757}$	$y = \frac{118,733x}{x + 15,862}$	$y = \frac{126,033x}{x + 17,079}$
$(y_i - \hat{y}_i)^2$	594,268	370,207	306,872	234,353
Коефициент на детерминация	0,937	0,961	0,967	0,975
Грешка в a_0	17,6%	9,3%	5,8%	-
Грешка в a_1	52,5%	33,2%	7,1%	-

Източник: Собствена разработка.

Изводи

Численият пример показва, че всички модели обясняват голяма част от вариацията на зависимата променлива. Ако считаме, че най-добрият модел се получава с нелинейния метод на най-малките квадрати, преобразуванията (4), (7) и (10) внасят промени в оценката на параметрите, като в някои случаи грешката е доста чувствителна. Когато става дума за оценка на параметрите на физически закони такива отклонения би трябвало да се считат за недопустими, тъй като могат да доведат до погрешни теоретични изводи.

В учебните материали на редица курсове има раздели, посветени на линеаризацията на дробно-линейната регресия. В много малко от тях се споменава, че самият метод на линеаризация (независимо с кой от трите модела) внася допълнителна неточност, като отклоненията може да са значителни.

При наличието на компютри и подходящ софтуер преобразуването на регресионното уравнение с цел използване на линейния метод на най-малките квадрати губи практическото си значение. Такива методи представляват интерес повече от историческа гледна точка. И в преподавателската, и в изследователската работа следва да се обръща внимание на по-прецизните нелинейни методи.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Burden, R. L., Faires, J. D., & Burden, A. M. (2014). *Numerical Analysis*. Boston: Cengage Learning.
2. Eadie, G. S. (1942). The Inhibition of Cholinesterase by Physostigmine and Prostigmine. *Journal of Biological Chemistry* , 146 (1), 85-93.

3. Hanes, C. S. (1932). Studies on plant amylases: The effect of starch concentration upon the velocity of hydrolysis by the amylase of germinated barley. *Biochemical Journal* , 26 (5), 1406-1421.
4. Johnson, K. A., & Goody, R. S. (2011). The Original Michaelis Constant: Translation of the 1913 Michaelis–Menten Paper. *Biochemistry* , 50 (39), 8261-8520.
5. Lineweaver, H., & Burk, D. (1934). The Determination of Enzyme Dissociation Constants. *J. Am. Chem. Soc.* , 56 (3), 658-666.
6. Marquardt, D. W. (1963). An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *SIAM Journal on Applied Mathematics* , 11 (2), 431-441.
7. R Foundation. The R Project for Statistical Computing: <https://www.r-project.org/>
8. Ritz, C., & Streibig, J. C. (2008). *Nonlinear Regression with R*. New York: Springer.
9. Taylor, B. N. (2005). The Determination of Best Values of the Fundamental Physical Constants. *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* , 363 (1834), 2105-2122.
10. Trefethen, L. N. (2011). Ten Digits Problems. Or D. Schleicher, & M. Lackmann (Ред.), *An Invitation to Mathematics* (стр. 119-136). Berlin, Heidelberg: Springer.

THE INTERACTION OF MATHEMATICS WITH ECONOMICS

Chief Assist. Prof. Velina Yordanova, PhD.

University of Economics - Varna, Bulgaria

Abstract: *Although mathematics and economics are two separate fields of knowledge, each with its own object and subject of study, the connection between these two sciences is becoming stronger and more tangible. In modern economics the application of mathematics is widely used. This fact is due that mathematical tools allow for reliable and accurate analysis in the study of complex economic systems and the processes taking place in them. In the present report the author attempts to point out the connection between mathematics and economics. The factors influencing the interaction of mathematics with economics are also pointed out.*

Keywords: *Connections; Economics; Mathematics*

JEL code: *C00*

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕТО НА МАТЕМАТИКАТА С ИКОНОМИКАТА

Гл. ас. д-р Велина Йорданова

Икономически университет – Варна, България

В съвременната икономическа реалност необходимостта от използването на надеждни и точни методи за анализ са от първостепенна важност. Сложните икономически системи и процесите, протичащи в тях изискват използването на знания и от много други области, като например математиката. Математическият апарат е универсално средство за решаването на редица проблеми, пред които са изправени икономистите. Взаимодействието на математиката с икономиката в днешно време става все по-силно и осезаемо. Именно поради това редица автори [Атанасов, Б., Пл. Илиев. 2009: 22-31; Славов, З., 2007: 89-94] изследват развитието на математиката и възможностите, които тя предлага при използването ѝ в икономиката. За широкото приложение на математическите инструменти в икономиката свидетелстват множеството научни разработки от различни автори [Николаев, Р, Т. Милкова. 2022: 96-111; Николаев, Р. 2019: 3-10; Милкова, Т. 2015: 75 – 81; Петков, Й. 2015:487-494; Михайлов, Д. 2021; Мирянов, Р. 2017: 7-17 и др.]

Основната цел, която си поставя авторът в настоящия доклад е да направи опит да изследва връзката на математиката с икономиката. За постигането на така поставената цел авторът прави опит да реши следните задачи:

- да разгледа същността на математиката и възможностите, които тя предоставя;
- да посочи факторите, оказващи влияние върху взаимодействието на математиката с икономиката.

Основният проблем за намирането на връзка между математиката и икономиката се състои в необходимостта, от една страна, да се повиши точността на методите за икономически анализ, планиране, прогнозиране и управление, а от

друга страна, в трудността на формализиране и количествено определяне на такива показатели като индивидуални предпочитания, интереси и др. В този смисъл предметните области на математиката и икономиката не само се пресичат и частично съвпадат, допринасяйки за взаимното развитие на тези две научни направления, но могат и да се противопоставят една на друга. В тази връзка е важно да се изясни научния статус както на математиката, така и на икономиката.

От наша гледна точка математиката може да се разглежда от една страна като език за количествено описание на определени закономерности и връзки на емпиричния свят и от друга страна като чиста наука. Математиката създава многофункционални аналитични методи за изучаване на връзките и придобиване на информация за света около нас. Това прави математическия апарат универсален инструмент за решаване на множество казуси. Що се отнася до икономиката бихме могли да я определим като икономическата дейност на обществото, както и съвкупността от отношения, които се развиват в системата на производството, разпределението, обмена и потреблението. Тя е инструмент за анализ на широката социална реалност, при който научната насоченост е към самия проблем.

Приложението на математиката в икономиката не е свързано само с прилагането на определени количествени характеристики и числови примери за илюстриране на едни или други икономически позиции и теории. Математиката е средство за изследване на икономическите проблеми с помощта на числови данни, идентифициращи икономическите връзки и зависимости и на тази основа да се вземат обосновани решения.

Без да се спираме на историческото развитие на математиката като наука, което обхваща различни периоди¹, ще посочим, че в настоящия етап от нейното развитие, тя предоставя възможности за значително по-добро формализиране на многообразните отношения на действителността, да описва и моделира това многообразие с помощта на натрупания богат обем от теоретични знания. Днес математиката се счита за един от най-важните методи за анализ на икономическата реалност. В рамките на икономическия хаос и неопределеност е възможно да се прогнозира поведението на сложните икономически системи и процесите в тях чрез използването на математическите методи.

Актуалността на проблема за взаимодействието на математиката и икономиката произтича от осъзнаването на методическите и предметни особености на тези две дисциплини. Основните отличителни черти на математиката: 1) строги правила за извеждане на връзки между елементите на анализа; 2) система от аксиоми, на които се основават математическите формули; 3) високо ниво на абстракция на аналитичните операции.

Между математиката и икономиката има някои общи черти, а именно че и двете се занимават и изучават абстрактни обекти с висока степен на сложност. По-конкретно това означава, че както в математиката всички формули са абстрактни, така и в икономиката процесите, явленията и отношенията между тях са икономически абстракции без пространствени характеристики. Ето защо можем да твърдим, че икономиката е подходящо поле за приложение на математиката.

Редно е да отбележим все пак, че връзката на математиката с икономиката не е едностранен процес. От една страна създаването на нови математически

апарати и тяхното използване позволява на икономиката да решава по нов начин съществуващите казуси. Математическият инструментариум разширява възможностите за търсенето на оптимални управленски решения. От друга страна икономиката поставя нови проблеми в областта на математиката и стимулира търсенето на методи за тяхното решение. В тази връзка икономическата практика е повлияла за появата на цели нови направления в областта на математиката като: теория на игрите, теория на масовото обслужване и т.н.

Интегрирането на математическите модели² в икономическата теория дава редица предимства, някои от които са: комплексно подхождане към сложните икономически системи (разкриват се не само количествените връзки, но и се задълбочават качествените представи за закономерностите, произтичащи в тях); извеждане на структурните особености на икономическата система, нейните вътрешните и външни функционални връзки; провеждане на икономически експерименти (без да рефлексират пряко върху изследваната икономическа система), оптимална точност на получените резултати.

От икономическа гледна точка има редица изисквания, на които трябва да отговарят математическите модели:

- адекватност – съответствие на модела на неговия оригинал;
- обективност – съответствие между научните изводи и реалните условия;
- простота – второстепенните фактори да не засенчват модела;
- чувствителност – способността на модела да реагира на изменение на началните данни;
- универсалност – широка област на приложение на модела.

Бихме могли да посочим, че при взаимодействието на математиката с икономиката съществуват множество обективни фактори, които едновременно засилват и проблематизират сътрудничеството между тези две научни направления. Тези фактори ще ги обособим в две основни групи. Към първата група от фактори се отнасят:

- развитието на бизнес средата – нараства нуждата от оперативни изчисления, планиране, прогнозиране в мащаба на фирмата и индустрията;
- развитието на информационни технологии, които улесняват - на ниво специални програми - формализирането на икономическата информация и нейното предаване в компресиран обем;
- преходът от икономика, базирана на материални ресурси, към икономика, основана на знанието – оттук и нарастващият интерес на научната общност към интердисциплинарните изследвания, вниманието към иновациите и новите технологии в науката и практиката;
- нарастващата сложност на социално-икономическите системи, което налага анализирането на големи обеми структурирана информация, създаване на алгоритми за решаване на социално-икономически проблеми и изчисляване на последствията от тези решения.

Що се отнася до втората група от фактори, те включват:

- самия предмет на икономическата наука (човекът и обществото) и трудностите при формализирането на съответните явления и процеси;
- кризата на основите на икономическата наука (ориентацията към социално-хуманитарно познание вместо към естествени науки, преосмисляне на методологията, преосмисляне на критериите за научен характер и самото понятие за наука).

В заключение на изложеното по-горе ще отбележим, че взаимодействието на математиката с икономиката е важен и значим въпрос, който заслужава необходимото внимание. Приложението на математическия апарат в икономиката позволява да се правят точни анализи на изследваните икономически проблеми и да се взимат оптимални управленски решения.

БЕЛЕЖКИ

1. В свое изследване Б. Атанасов предлага и разглежда пет периода на развитие на математиката: период на зараждане на математиката; период на елементарната математика; период на математиката на променливите величини; период на класическата математика; период на кибернетичната математика. [Атанасов, Б., Пл. Илиев. 2009: 22-31]
2. Математически модел на даден обект или явление се нарича неговата опростена, идеализирана схема, съставена с помощта на математически символи, операции и съотношения.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Atanasov, B., Pl. Iliev. (2009). Matematika i ikonomika. Godishnik na Ikonomicheski universitet-Varna, Varna: Nauka i ikonomika, Tom 81.
2. Milkova, T. (2015). Model za optimizirane na asortimentnata struktura na proizvezhdanata produktsiya. // Ikonomikata v promenyashtiya se svyat: natsionalni, regionalni i globalni izmereniya : Sb. dokl. ot mezhdunar. nauch. konf. : T. 2. - Varna : Univ. izd. Nauka i ikonomika.
3. Miryanov, R. (2017). Optimizirane na tovarnite prevozi v mikrologistichni sistemi . Ikonomika i kompyutarni nauki, Varna: Znanie i biznes , 3, 4.
4. Mihaylov, D. (2021). Simulatsionno modelirane na prodalzhitelnostta na proizvodstveni i upravleniski protsesi. Varna : Nauka i ikonomika.
5. Nikolaev, R. (2019). Nyakoi zavisimosti mezhdu tsena, razkhodi i pechalba. Izvestiya na Sayuza na uchenite - Varna. Ser. Ikonomicheski nauki, Varna: Sayuz na uchenite - Varna, 8, 2.
6. Nikolaev, R., Milkova, T. (2022). Dvuparametrichna zadacha za optimalno razpredelenie na resursi. Matematika i informatika : Nauchno spisanie = Mathematics and Informatics, Sofiya : Az Buki, 65, 1.
7. Petkov, Y. (2015). Edna modifikatsiya na model za optimalno upravlenie na zapasite pri sluchayno tarsene. // Ikonomikata v promenyashtiya se svyat: natsionalni, regionalni i globalni izmereniya : Sb. dokl. ot mezhdunar. nauch. konf. : T. 2. - Varna : Univ. izd. Nauka i ikonomika.
8. Slavov, Z. (2007). Mezhdu matematikata i ikonomikata. Sbornik „Matematika i informatika – realnost i perspektivi”, Univ. izd. na VSU „Ch. Hrabar”.

THE ROLE OF FUNDAMENTAL DISCIPLINES FOR THE QUALITY OF HIGHER EDUCATION

Chief Assist. Prof. Vanya Stoyanova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *This report examines different approaches in defining the quality of higher education in relation to the established roles, goals and functions of the educational system in the new conditions. The main differences between fundamental and applied disciplines are revealed and, on this basis, the role of fundamental disciplines in achieving the quality of higher education in accordance with its main goal is brought out.*

Keywords: *Quality of higher education; Fundamental disciplines; Applied disciplines.*

JEL code: *I 23*

РОЛЯТА НА ФУНДАМЕНТАЛНИТЕ ДИСЦИПЛИНИ ЗА КАЧЕСТВОТО НА ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ

Главен асистент, доктор Ваня Стоянова
Икономически университет – Варна, България

В последните години сме свидетели на все по-голямата роля, която се отрежда на образованието и образователните институции. И това е логично и обяснимо, защото нивото на образованието в страната е фактор за нейния икономически растеж и просперитет. Според Rifkin (2000) богатството вече не се налага във физическия капитал, а по-скоро в човешкото въображение и креативност. Това намира израз и в Индекса на човешкото развитие на ООН, който включва сред измерваните фактори и образованието чрез показателите очакван и среден брой години в образование. Същевременно, в контекста на непрекъснато променящите се икономически условия, пред образователните институции се поставят и нови изисквания. Световната декларация за висшето образование (1999) определя като основни мисии на системите за висше образование да образоват, да обучават, да предприемат изследвания и по-специално да допринасят за устойчивото развитие и подобряване на обществото като цяло чрез подготовката на висококвалифицирани висшисти и отговорни граждани. Това води и до завишаване на изискванията за качеството на висшето образование.

Разбирането за качеството на висшето образование не е еднозначно и може да се разглежда като една сложна система. От една страна, под качество се разбират вътрешни свойства и характеристики на образователния процес, осъществяван в съответната институция, които могат да бъдат измерени чрез количествени показатели. Измерването на качеството на висшето образование в този смисъл се осъществява чрез рейтинговата система, която е обект на многобройни дискусии и критики по отношение на включените измерители, някои от които са външни за системата на висшето образование като например величината на получавания среден осигурителен доход (Тодоров, 2020). От друга страна,

акцентът се поставя на съответствието на административни и институционални (национални и европейски) регулации на организацията на процеса на предоставяне на образователната услуга. От трета страна, качеството на висшето образование се обвързва със съдържанието на учебни програми и структура на учебните планове. В Световната декларация за висшето образование (1999) се посочва: „Съществува осъзната необходимост от нова визия и парадигма на висшето образование, което трябва да бъде ориентирано към студентите. За да се постигне тази цел, учебните програми трябва да бъдат преработени, така че да надхвърлят простото когнитивно овладяване на дисциплини и да включват придобиването на умения, компетенции и способности за комуникация, креативен и критичен анализ, независимо мислене и работа в екип в мултикултурен аспект.“ И именно разглеждайки качеството на висшето образование от този аспект, който като че ли е най-слабо застъпен, изпъква ролята на фундаменталните дисциплини. Според Everett (2008) „много академици възприеха призива за фундаментално прориентиране на висшето образование около целта за образование за устойчиво развитие.“ Григоров (2003) дава формула на висшето образование „фундаментална култура, качество на интелекта, върхов професионализъм“ като под фундаментална култура той разбира култура на мисленето, която определя качеството на интелекта. В същото време в Стратегията за развитие на висшето образование в Република България за периода 2021 – 2030 година по отношение на промяна в ролята, целите и функциите на висшето образование може да се види следния текст: „Диференцирането на мисията, профила и териториалната значимост на висшето училище се разглежда като средство за приспособяване към нарастващите и все по-разнообразни изисквания на пазара на труда за висококвалифицирана работна сила. В някои случаи обаче се стига до утвърждаване на чисто инструментална роля на висшето образование и на подчиняването му изцяло на потребностите на пазара на труда. Това принизява ролята на висшето образование като научна и духовна институция, която същевременно има и значими общосоциални функции. Традиционният модел на висше образование, основан на аудиторни занятия, е изправен пред сериозната конкуренция на масовите отворени онлайн курсове (MOOCs), както и на образователните програми и практически ориентирани курсове, предлагани от различни платформи и организации.“ От една страна, се отчита опасността от елементаризиране на висшето образование при прекаленото му обвързване с изискванията на бизнеса, но от друга – различните курсове се възприемат като конкуренция на висшето образование, т.е. негласно се приема, че висшето образование има приложен, а не фундаментален характер. Ако това е така как и по какво биха се различавали един от друг ,например, един счетоводител със завършена търговска гимназия и счетоводител, получил магистърска степен във висше училище? Според Тодоров (2020) „затвърждава се налаганата в последните години тенденция към опуцяване – превръщане в ПУЦ-ове – на българските висши училища. Не е ли изконната задача на университетите да работят за формиране на личности и граждани, които след натрупване на фундаментални знания и базови умения да придобиват определени професии, като се реализират в стопанската област, но не само в нея?“ Този проблем, обаче, не е само български. Tapper and Palfreyman (2000) много по-рано коментират тази система от

проблеми и дори посочват факторите, отговорни за нея – т.нар. трите „М“ – маркетингизация, масовизация и мениджъризация. Маркетингизацията заменя ценностите знание и образование с умения и образование, съобразени с потребностите на пазара. Масовизацията заменя образованието за селектирани групи от обществото с образование за всички. Често се стига до там, че самите обучаващи се нямат нужната мотивация и желание да получат знания и съответната на тях образователна степен. Мениджъризацията (която в България все още не се проявява) заменя автономното управление на академичната общност с бюрокрация и управление на мениджъри.

Тази опасност произтича от липсата на ясно разграничаване между образование и обучение, нещо повече, много често двете думи се използват като синоними, въпреки че между тях има сериозни съществени различия. Ролята на един курс е да обучава и да създава приложни умения, докато ролята на висшето фундаментално образование е да образова – да дава знания за произхода и същността на основните процеси в съответната наука. Фундаменталното образование не дава толкова отговори, то по-скоро изяснява въпросите и формира възможност за откриване на правилни решения на базата на критично мислене и креативност. Приложните курсове налагат шаблонно мислене, тъй като обучението е схематично – стъпка по стъпка. Това, разбира се, е по-лесно усвоимо, но при ситуация, която не може да се впише в шаблона, получените умения не са достатъчни за разрешаване на казуса и вземане на правилно решение. Фундаменталното образование, респективно фундаменталните дисциплини, развиват мисловния процес и интелекта, защото те дават знания за логиката на процесите от съответната област. В тази връзка изпъква ролята на фундаменталните дисциплини за достигане на качество на образованието – те осигуряват развитие на интелекта, логическото и критичното мислене и по този начин способстват за достигане на по-високо ниво на професионализъм, т.е. осигуряват достигането на целите на висшето образование, залегнали в Световната декларация за висшето образование. Всичко това произтича и от различията, които съществуват между фундаментални и специални (приложни) дисциплини. Фундаменталните дисциплини са с по-широк обхват и се доближават в максимална степен до съответната наука. Специалните (приложните) дисциплини са с по-стеснен обхват и дават знания за методите. Например, „Въведение в статистиката“ е фундаментална дисциплина и дава знания за основните понятия, с които си служи статистиката, за нейните обект и предмет, за различните подходи при осъществяване на анализ, за условията, при които се прилагат различните методи, формира знания, които позволяват да се направи обоснован избор на подходящ метод. „Анализ на динамични редове“ е специална дисциплина, която се занимава със специфични методи и начините за тяхното приложение, но изучаването на тази специална (приложна) дисциплина е немислимо преди получаване на знания чрез фундаменталната дисциплина за същността на статистиката. Разделението на дисциплините на фундаментални и приложни е обосновано и продиктувано от необходимостта да се прилагат получените фундаментални знания, както и да се направи връзка между коренно различни науки. Това може да се илюстрира и по следния начин. Исторически най-рано са възникнали две науки – философия и математика. Едната изследва качествената страна на живота, а другата – коли-

чествената и между тях няма нищо общо. Като опит да се приближат двете науки се появяват нови като „Статистика“, „Икономическа теория“ и други, които са по-близко до математика или философия, но ползват инструментариума и на другата. Постепенно, стеснявайки обхвата на знанието, се появяват и приложните дисциплини, които се занимават основно с методите и тяхното приложение. Разбира се, трябва да се изтъкне и това, че не е необходимо да има противопоставяне между двата вида дисциплини, те трябва да съществуват в синхрон и взаимно да се допълват. Не е възможно да се получи фундаментално образование във всички области, поради необходимостта от по-продължителен период. Затова в различните направления на висшето образование се изучават различни фундаментални дисциплини. Григоров (2003) различава два вида фундаментална култура – универсална и професионална. Общото и за двата вида е, че усвоените чрез фундаменталните дисциплини знания се превръщат в начин на мислене.

Фундаменталното образование има и още едно предимство – то осигурява възможността за продължаващо обучение. В рамките на университетското образование, при съчетаването на фундаментални и приложни дисциплини, може да се достигне до ситуация, при която получените знания не са достатъчни при изучаването на определен обект, но подготовката, получена чрез фундаменталните дисциплини дава възможност да се търси, намира и ползва с разбиране допълнителна нова информация от съответната предметна област. Така образователният процес може да продължи чрез самообучение през целия живот, а това е и предпоставка както за професионално, така и за личностно развитие. Фундаменталното образование има за цел и обикновено води до създаване на потребност за саморазвитие и на тази основа се изграждат и професионализъм, и личностни качества, които позволяват на отделния човек да се адаптира, да живее пълноценно в нови условия, да бъде полезен за себе си като индивид и за обществото като цяло. Разбира се, образователният процес зависи както от обучаващия, така и от обучавания и би трябвало да се има предвид, че влиянието на участниците е равностойно.

Необходимо е да се разкрие и още една, не по-маловажна разлика между двата вида дисциплини. Фундаменталните дисциплини се променят много по-бавно от приложните, много често знанията, които те дават не остаряват в рамките на продължителността на човешкия живот. Приложните дисциплини са много по-зависими от измененията в съответната предметна област и това води до по-бързото остаряване на знанията, които те дават. Например фундаменталната дисциплина „Икономическа теория“ се развива чрез две основни направления – класицизъм, появил се през втората половина на XVIII век и кейнсианство, появило се в края на XIX век и утвърдено в началото на следващия век. Между двете теории има съществени различия и те илюстрират различни подходи за обяснение на икономическия механизъм. В края на XX век се наблюдава обръщане към класическите идеи под формата на неокласицизъм и въпреки че в рамките на това течение има различни икономически теории, в своята същност те споделят идеите на класицизма. А вече почти век не се е появила качествено нова икономическа теория, която да е в състояние да обясни функционирането на националните и световни икономики. В същото време макроикономическото моделиране като приложна дисциплина се развива постоянно и новопостроените

модели се радват на пълната гама от емоции – „от осанна до разпни го“. Такива примери могат да бъдат дадени от почти всяка предметна област. Като потвърждение на казаното може да се посочи и мнението на Tunnerman and Chaui (2003): „Има значително намаляване на времето между появата на новото знание и неговото технологично приложение, което означава, че техническите му приложения могат да доведат до определяне на съдържанието на научните изследвания, с възможни последици върху традиционния „безкористен“ характер на основните изследвания. Съвременното познание притежава, наред с други характеристики, тези на ускорен растеж, по-голяма сложност и тенденция към бързо остаряване.“

В заключение може да се каже, че фундаменталните дисциплини изпълняват формулираните в редица нормативни документи цели и изисквания към висшето образование като по този начин допринасят за качеството на образователната система. Необходимо е да се конструират показатели за качество, които да отразяват съдържанието на образователния процес и да допълнят сега действащата система за оценка на качеството. Може би е време да бъдат припомнени традициите на българското висше образование и да се присъединим към призива на редица учени за фундаментализация на висшето образование. По този начин ще се гарантира човешкото развитие в България и ще се осигурят предпоставки за растеж. Понякога „новото“ е „добре забравено старо“, което се прилага в нови условия при спазване на нови изисквания. Безспорно, бъдещето на висшето образование е обвързано с пазара на труда и с работодателите, но образователната система може да отговори на техните изисквания без да губи своята идентичност и да принизява знанията, които предоставя на студентите и без да влиза в противоречие с основната цел на висшето образование.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Everett, J. (2008) Sustainability in higher education: Implications for the disciplines. Available at <https://doi.org/10.1177/1477878508091115> /Accessed 31 August 2022/
2. Grigorov, A. (2003) Visheto obrazovanie I fundamentalnata kultura. Available at https://dialogue.uni-svishtov.bg/dialog_old/Discussion/Grigorov.htm /Accessed 28 August 2022/
3. Mayor, F. (1999) Higher education in the twenty-first century: vision and action, v.1: final report. Available at <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000116345> /Accessed 2 September 2022/
4. Rifkin, J. (2000) *The Age of Access*. Penguin Putnam Inc., New York
5. Tapper, T., D. Palfreyman (2000) *Oxford and the Decline of the Collegiate Tradition*. London: Woburn Press
6. Todorov, D. Za visheto obrazovanie. Available at <https://kultura.bg/web/za-vissheto-obrazovanie> /Accessed 1 September 2022/
7. Tunnerman Bernheim, C., M.de Souza Chaui (2003) Challenges of the university in the knowledge society five years after the World Conference on Higher Education. Available at <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000134422> /Accessed 30 August 2022/

THE PLACE OF STATISTICS AND ECONOMETRICS IN THE ECONOMIC EDUCATION IN THE WORLD'S TOP UNIVERSITIES

Chief Assist. Prof. Slaveya Zhelyazkova, PhD

University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *The paper examines what place statistics and econometrics occupy in the curricula of future economists with bachelor degree in the top 10 universities according to the QS World University Rankings by Subject 2022 (Social Sciences & Management), compared to Bulgarian universities. It is found that students majoring in economics at these top universities must study at least one statistical course and one econometric course. The mandatory nature does not deprive them of the opportunity to choose the course most suitable for them from the many offered in the statistical and econometric block. Training in statistic and econometric courses is tied to the use of statistical and econometric software.*

Keywords: *Statistics, Econometrics, Curriculum*

JEL code: *C19*

МЯСТОТО НА СТАТИСТИКАТА И ИКОНОМЕТРИЯТА В ОБУЧЕНИЕТО НА ИКОНОМИСТИТЕ В ТОП УНИВЕРСИТЕТИ В СВЕТА

Гл. ас. д-р Славей Желязкова

Икономически университет - Варна, България

Въведение

Обучението по статистика в университетите, които подготвят икономисти, има вековна история. Това е така не само в световно известните университети, създадени преди столетия, но и в българските университети. Например във Висшето търговско училище – Варна, чийто правопреемник е Икономически университет – Варна, статистика се преподава от 1921 г., т.е. една година след основаването му. Голямото значение на знанията и уменията, които студентите получават при изучаването на статистически и иконометрични дисциплини се изтъква в справочниците на всички престижни университети. Например, в този на Харвардския университет се посочва, че „колкото по-засилено е обучението в тази област, толкова по-голям е обхватът и дълбочината на емпиричните изследвания, които могат да бъдат разбрани и реализирани“ (Concentrator Guide, 2022). Притеснителна е тенденцията, която се наблюдава през последните три десетилетия в България, за намаляване на броя на статистическите и иконометрични дисциплини в учебните планове на бъдещите икономисти и дори изключването им. Причините могат да се търсят в няколко посоки. Една от тях е олекотяване на учебните планове – намаляване на броя на дисциплините и заместване на тези, които се възприемат като сериозно препятствие пред студентите с други, които не изискват много усилия от тяхна страна. В някои случаи, за да се избегне директното отстраняване на дисциплините, те се превръщат от задължителни в избираеми като се слагат в блок, от който е малко

вероятно да бъдат избрани. Друга причина, която прави статистическите и иконометрични дисциплини „излишни“ е абсолютизирането на ролята на статистическия и иконометричен софтуер, който според нестатистиците може да бъде използван за реализиране на необходимия анализ, въпреки непознаването на статистическите методи. Често статистиците са търсени за консултации, при които се съобщава, че анализът е направен, но трябва някой да разчете резултатите от софтуера. Въпросът, който всеки статистик би задал, е може ли да се реализира коректно статистическият анализ, без да се познават статистическите методи с необходимите предпоставки за приложението им и последващите диагностични тестове. Ламбова засяга някои „тревожни моменти, свързани с преподаването на статистически методи с помощта на статистически софтуер от специалисти в областта на предметните науки, в които статистическата методология намира приложение.“ (Lambova, 2020). Преподаването на статистика от нестатистици като част от икономически дисциплини е проблем, който се разглежда от Hotelling (1940) преди повече от 80 години, но въпреки това е актуален и днес.

Въпросът за мястото на статистиката и иконометрията в учебните планове на бъдещите икономисти става още по-актуален във връзка с преминаването в бъдеще към тригодишен срок на обучение, както е в повечето европейски университети.

Предвид горепосочените проблеми, настоящият доклад има за цел да се проучи какво място заемат статистическите и иконометричните дисциплини в учебните планове на бъдещите икономисти с бакалавърска степен в 10 топ университета според престижната рейтингова система QS World University Rankings by Subject 2022 (Social Sciences & Management), като същевременно да се направи паралел с три български висши учебни заведения с дългогодишен опит в обучението на икономисти.

Статистиката в учебните планове на бъдещите икономисти с бакалавърска степен

Харвардският университет е първи в рейтинговата система QS World University Rankings by Subject 2022 (Social Sciences & Management). В него обучението на бъдещите икономисти е четиригодишно, но за напреднали студенти се предлага и тригодишен срок. Предлагащите от департамент „Статистика“ статистически курсове са много на брой, но бъдещите икономисти трябва задължително да изберат един от четирите курса: Stat 100 (Въведение в статистиката и дейта сайънс), Stat 104 (Въведение в количествените методи за икономиката), Stat 109 (Въведение в статистическото моделиране) и Stat 110 (Теория на вероятностите) (Concentrator Guide, 2022). Те са на различно ниво и могат да бъдат избрани в зависимост от предварителната подготовка по статистика и математика от средното училище и желанието за получаване на по-задълбочени знания.

Курсовете Stat 100 и Stat 104 покриват по същество материала по въведение в статистиката. Stat 100 се препоръчва на студенти, които нямат афинитет към математиката и затова акцентът е върху разбирането и практическото приложение на статистическите методи с използването на подходящ софтуер (R), а не върху формулите и извеждането им. Stat 104 (Въведение в количествените методи за икономиката) е на по-високо ниво от Stat 100 и обхваща повече материал като

освен темите, които стандартно се включват във въведение в статистиката, подробно се разглеждат многофакторния регресионен анализ с необходимите проверки на хипотези и проблемите с мултиколинеарността, хетероскедастичността, използването на фиктивни променливи, а така също - въведение в симулациите. Затова темпото е по-бързо и броят на студентите, които се обучават в курса е по-малък. Обучението по тази дисциплина също има практическа насоченост като основно примерите са от икономиката и за обобщаването и анализа на данните се използва статистически софтуер (Stata) (Concentrator Guide, 2022).

Както се посочва в студентския справочник на Харвардския университет, курсът Stat 110 обхваща теория на вероятностите, която осигурява математическата основа за статистиката и е предпоставка за задълбочаване на познанията по статистика с допълнителен курс Stat 111 (Въведение в статистическите заключения), макар и извън групата на задължителните. Обучението по Stat 111 включва използването на статистически софтуер (R). За избралите тези дисциплини студенти има изискване за завършен курс по математически анализ и линейна алгебра (Concentrator Guide, 2022).

Stat 109 (Въведение в статистическото моделиране) се разглежда като втори курс по статистически заключения и е надграждащ по отношение на въведение в статистиката. Тук след въведение с основни теми от теорията на статистическите заключения се преминава към статистическото моделиране като подробно се разглеждат многофакторните линейни регресионни модели с всички диагностични проверки и трансформации, както и приложението на регресионния анализ при времеви редове, а така също логистичната регресия. Курсът е изцяло базиран на използването на статистическия софтуер R (Concentrator Guide, 2022).

Препоръчва се задължителният курс по статистика да се премине още първата година, но не по-късно от зимния семестър на втори курс, защото за летния семестър е предвиден спецсеминарът (Ec 970), по време на който се очаква получените статистически знания и умения да намерят практическо приложение. Важността на тези знания се затвърждава с правилото курсовете по статистика да не могат да бъдат избрани за преминаване със зачет, при условие че до два зачета са разрешени за целия срок на обучение (Concentrator Guide, 2022).

Оксфордския университет е втори в рейтинговата система QS World University Rankings by Subject 2022 (Social Sciences & Management). Там бъдещите икономисти с бакалавърска степен се обучават едновременно по още една или две специалности при тригодишен срок на обучение. Налични са три такива хибридни специалности: 1) „Философия, политика и икономика“; 2) „Икономика и мениджмънт“ и 3) „История и икономика“. В доклада ще бъде разгледано обучението само по специалност „Икономика и мениджмънт“, защото при нея на първо място стои икономиката и освен това се съчетава с мениджмънта, който в България е специалност в икономическите висши учебни заведения. В тази хибридна специалност курсът по вероятности и статистика се изучава задължително в първи курс и е част от курса „Въведение в икономиката“, който включва освен това микроикономика и макроикономика. Във втори курс студентите могат да изберат курса „Количествени методи“, но той не е задължителен (Economics and Management | University of Oxford, 2022). Учебните

програми по тези дисциплини не са достъпни онлайн. За разлика от обучението в България по две специалности, което покрива всички дисциплини от тези специалности, в Оксфордския университет студентите не се натоварват допълнително, но все пак се балансира броят на задължителните дисциплини от двете специалности. Така не се изучават толкова икономически дисциплини, колкото при самостоятелна специалност „Икономика“. Може да се счита, че вследствие на това дисциплината „Вероятности и статистика“ не е самостоятелна дисциплина, а също „Количествени методи“ е избираема дисциплина.

Лондонското училище по икономика е трето в рейтинговата система QS World University Rankings by Subject 2022 (Social Sciences & Management). Сроктът за обучение на бъдещите икономисти с бакалавърска степен е тригодишен. Обучението по статистика започва още първия семестър със задължителната дисциплина ST109 „Елементарна статистическа теория“. Тя включва темите от описателната статистика, теория на вероятностите и теоретични разпределения с примери от областта на икономиката. Статистическата подготовка на студентите се задълбочава с изучаваните следващите три семестъра иконометрични дисциплини, които също имат задължителен характер (BSc in Economics, 2022).

Четвърти в разглежданата рейтингова система е Кеймбриджкия университет. Там за получаване на бакалавърска степен по икономика студентите се обучават три години като специфичното е, че изпитите по изучаваните дисциплини са в края на всяка година. Така дисциплина, която би следвало да се изучава един семестър, се обединява с друга такава. Обикновено принципът за обединение е взаимната свързаност или принадлежност към една и съща научна област или близки такива. Така математиката и статистиката са обединени в дисциплината „Количествени методи в икономиката“ (Part I Paper 3), която се изучава през първите два семестъра и има задължителен характер. Лекциите и упражненията по математиката и статистиката се провеждат паралелно двата семестъра от различен преподавателски екип. Изпитът е един, но в две части, като е задължително студентите да отговорят на въпроси и от двете части. В курса по статистика се изучава описателната статистика, теория на вероятностите и теоретични разпределения, статистическо оценяване и проверка на хипотези, регресионен анализ с всички диагностични проверки и специфични проблеми (Course Structure | Faculty of Economics, 2022).

В Станфордския университет, който е пети в посочената по-горе рейтингова система, обучението в бакалавърската степен е четиригодишно с три семестъра на година. Препоръчва се в рамките на един семестър студентите да посещават един или два курса. Тези, за които икономиката е първа и основна специалност, като част от фундаменталната си подготовка задължително изучават дисциплината „Въведение в статистическите методи“ (Econ 102A), която е със стандартно съдържание и практическа насоченост (Major | Department of Economics, 2022).

Масачузетският технологичен институт е шести в рейтинговата система QS World University Rankings by Subject 2022 (Social Sciences & Management). Там се предвижда студентите икономисти да получат бакалавърска степен след успешно приключване на четиригодишен срок на обучение (два семестъра на година – есенен и пролетен). Дисциплината „Въведение в статистическите методи в

икономиката“ (код 14.30) е задължителна и трябва изпитът по нея да бъде взет с оценка не по-ниска от С. Препоръчва се да се изучава във втори курс (есенен семестър). Темите, които се включват са типични за курсовете по въведение в статистиката. Не се посочва използване на статистически софтуер при обучението. Студентите, които са предварително запознати с теория на вероятностите и искат да навлязат в дълбочина в теоретичните основи на статистическите методи, могат да заменят тази дисциплина със „Статистика за приложения“ (код 18.650). Изучаваните теми са: статистическо оценяване, метод на максималното правдоподобие, метод на моментите, статистическа проверка на хипотези, регресионен анализ, Бейсова статистика, анализ на основните компоненти и генерализирани линейни модели. Този курс е силно математизиран и не предполага използване на статистически софтуер (MIT Economics : Undergraduate Program, 2022).

Националният университет на Сингапур е седми в разглежданата рейтингова система. Там обучението на бъдещите икономисти е четиригодишно, с два семестъра на година. Обучението по статистика започва с дисциплината „Основи за иконометрията“ (EC2303 Foundations for Econometrics), която подготвя студентите с необходимите знания за следващите иконометрични дисциплини и по своето съдържание отговаря на стандартен курс по въведение в статистиката. Този курс, макар и задължителен, може да бъде заменен с друг от групата на равнище 2000, ако преди това е изучавана дисциплината „Въведение в статистиката и статистическите изчисления“ (ST1131 Introduction to Statistics and Statistical Computing). Това се отнася за студенти, които се обучават едновременно и по друга специалност или са се прехвърлили (NUSMods, 2022).

Калифорнийският университет – Бъркли е осми в рейтинговата система QS World University Rankings by Subject 2022 (Social Sciences & Management). В учебните планове на бъдещите икономисти с бакалавърска степен задължително се включва курс по въведение в статистиката, като студентите трябва да изберат един от предложените седем курса: STAT 20 (Въведение в теория на вероятностите и статистиката), STAT 21 (Въведение в теория на вероятностите и статистиката за бизнеса), STAT W21 (Въведение в теория на вероятностите и статистиката за бизнеса - онлайн курс), STAT C88S (Теория на вероятностите и математическа статистика за Data Science), STAT C131A (Статистически методи за Data Science), STAT 135 (Концепции на статистиката), STAT C140 (Теория на вероятностите за Data Science). Последните четири курса са от специалността „Data Science“ и включването им в списъка позволява признаване на взетите изпити, макар и да не отговарят по съдържание на курс по въведение в статистиката. От първите три курса само при STAT 20 се използва статистически софтуер (R) (Major Requirements, 2022).

Девети в разглежданата рейтингова система е Йейлският университет. Там бъдещите икономисти задължително изучават един курс по анализ на данни и иконометрия, който могат да изберат измежду: Econ 117 (Въведение в анализа на данни и иконометрията), Econ 123 (Анализ на данни и иконометрия за средно напреднали) и Econ 136 (Иконометрия), но Департаментът по икономика силно препоръчва да се изберат два от тях. Първите два курса съчетават теми от статистиката с иконометрията и Data Science и предполагат използване на

софтуерният пакет R. За студентите с афинитет към математиката, които задължително са преминали курс по линейна алгебра и курс по математически анализ, се препоръчва да изберат Econ 136, който курс трябва задължително да се предшества от Econ 135 (Въведение в теория на вероятностите и статистиката) или Stat 241 (Теория на вероятностите), заедно със Stat 242 (Теория на статистиката). Университетът не предоставя свободен достъп до учебните програми (Economics < Yale University, 2022).

Университетът „Бокони“ (Bocconi University, Università Commerciale Luigi Bocconi) е на десето място в рейтинговата система QS World University Rankings by Subject 2022 (Social Sciences & Management). Там обучаващите се в специалността „Икономика и социални науки“ (BESS) получават бакалавърска степен по икономика след тригодишен срок на обучение. Освен тази специалност, в Университета са налични още няколко специалности, в които се съчетава икономиката с финансите, мениджмънта и компютърни науки: „Международна икономика и мениджмънт“, „Международна икономика и финанси“, „Икономика и мениджмънт за изкуствата, културата и комуникациите“ и „Икономика, мениджмънт и компютърни науки“. Във всички тези специалности статистиката се изучава като задължителна дисциплина. В специалността „Икономика и социални науки“ се предвижда статистиката да се изучава два семестъра, като за това са предвидени два модула, обособени в самостоятелни дисциплини: „30456 Статистика – модул 1 (теория и методи)“ и „30457 - Статистика – модул 2 (приложна статистика)“. Първият модул включва описателната статистика, вероятности, теоретични разпределения и извадкови разпределения. Темите, които се разглеждат във втория модул са: статистическо оценяване, проверка на статистически хипотези, метод на максималното правдоподобие и приложението му при статистическите заключения, корелационен анализ и линейна регресия, логистична регресия и Поасонова регресия. Обучението и в двата модула има практическа насоченост – анализират се реални данни и за приложение на някои от методите се прилага статистическия софтуер R. Статистиката се изучава два семестъра и в специалността „Икономика и компютърни науки“, а в останалите три специалности – един семестър, при което се разглеждат темите от стандартен курс по въведение в статистиката и се използва статистическия софтуер R (Bachelor of Science Programs - Bocconi University Milan, 2022).

В трите разглеждани български университета, обучаващи икономисти¹ - Икономически университет – Варна, УНСС и Стопанска академия "Димитър А. Ценов" статистиката се изучава като задължителна дисциплина, съответно с наименованието „Въведение в статистиката“, „Статистика“ и „Основи на статистиката“. Голяма част от вторите надграждащи статистически дисциплини, които се изучаваха от всички икономически специалности са отпаднали отдавна във времето. В ИУ – Варна се изучават дисциплините „Бизнес статистика“ (спец. „Бизнес икономика“) и „Социална статистика“ или „Демографска статистика“ (спец. „Социална сигурност и застраховане“). В УНСС дисциплините „О4079 Бизнес статистика“ и „О4070 Макроикономическа статистика“ са избираеми в блок с още седем дисциплини съответно за специалност „Икономика“ и „Макроикономика“ (УНСС :: Направления и специалности, 2022). В СА "Д. Ценов" „Аграрна статистика“ е втора задължителна статистическа дисциплина за

студентите от специалност „Аграрна икономика“. Дисциплините „Регионална статистика“, „Статистически методи в управлението“ и „Финансова статистика“ са избираеми съответно за специалност „Публична администрация“, „Стопанско управление“ и „Финанси“. В четвърти и шести семестър в списъка на дисциплините от „Факултативен блок I“, от които студентите могат да изберат една на семестър се включват следните статистически дисциплини: „Аграрна статистика“, „Статистика на Европейския съюз“, „Статистически анализ на бизнес средата“, „Статистически и иконометричен софтуер“, „Статистически информационни системи“ и „Статистически методи в управлението“. В пети и седми семестър дисциплината „Многомерни статистически методи“ се включва във „Факултативен блок II“. „SPSS и R за бизнес аналитика“ е факултативна дисциплина само за студентите от специалност „Маркетинг“ (Свищов, 2022).

Иконометрията в учебните планове на бъдещите икономисти с бакалавърска степен

В Харвардския университет студентите освен базисния статистически курс, трябва да изберат задължително и един от два предложени курса по иконометрия Ec1123 или 1126. Курсът „Въведение в иконометрията“ (Ec 1123) е по-приложен и по-малко математизиран в сравнение с Ec 1126. Той запознава студентите с основни иконометрични техники и ги обучава как да ги прилагат с използване на софтуерния пакет Stata. Разглеждат се теми, които стандартно се включват в курсовете по въведение в иконометрията: множествена регресия, нелинейни модели, logit, probit, и Tobit модели, регресионни модели с времеви редове и панелни данни, работа с големи масиви от данни, динамични каузални ефекти и прогнозиране. Вторият предложен иконометричен курс Ec 1126 (Количествени методи в икономиката) е по-силно математизиран в сравнение с Ec 1123 и предоставя строго теоретично въведение в иконометричната методология. При него се навлиза в дълбочина в проблематиката на статистическите заключения и затова се изисква добро познаване на теорията на вероятностите, математическия анализ и линейната алгебра. Разглеждат се различните методи за оценка на моделите, нелинейни модели и възможности за апроксимирането им с линейни, проблемът с пропуснатите променливи в моделите и извеждане на формула за тях, особености на приложение на моделите при панелни данни, проблемите с конструиране на тестове и доверителни интервали за параметрите на оценяваните модели, тестове за наличието на каузална връзка и на (квази)експерименталните методи за оценка на каузални ефекти. При обучението се използват софтуерните пакет Stata и Matlab и се изисква от студентите като курсова работа да възпроизведат самостоятелно емпиричния анализ в някоя от предоставените им статии като това включва: самостоятелно набавяне на необходимите данни, написване на програмата на Stata, представяне и интерпретация на резултатите. Студентите, които проявяват интерес в областта на иконометрията, могат да изберат освен един от задължителните курсове и допълнителни от множеството предлагани от департамент „Статистика“ курсове по иконометрия на по-високо ниво (Concentrator Guide, 2022).

В Оксфордския университет в специалността „Икономика и мениджмънт“, дисциплината „Иконометрия“ е избираема в трети курс като има изискване преди

това във втори курс да е избрана дисциплината „Количествени методи“ (Economics and Management | University of Oxford, 2022).

В Лондонското училище по икономика бъдещите икономисти започват да изучават иконометрия (EC1C1) през втория семестър, след като през първия семестър са преминали задължително курса по статистика. Тази първа иконометрична дисциплина въвежда студентите в статистическото оценяване, проверката на хипотези и регресионния анализ. Тя има приложен характер и предполага анализ на реални данни за икономиката с използване на статистически софтуер и придобиване на основни умения за програмиране. Обучението по иконометрия продължава през следващите два семестра на втори курс с дисциплината „Иконометрия II“ (EC2C1). През зимния семестър на втори курс студентите разширяват своите знания с иконометричните модели на основата на статични редове, а през летния – прилагат иконометричното моделиране при времеви редове и панелни данни. Придобитите знания и умения намират израз в разработване на курсова работа (BSc in Economics, 2022).

В Кеймбриджкия университет обучението по иконометрия започва със задължителната дисциплина „Теория и практика на иконометрията I“ (Part IIA Paper 3), която се изучава в трети и четвърти семестър (втори курс). Тя стартира със задълбочаване на знанията за статистическите оценки, статистическите тестове и извадковите разпределения и продължава с детайлно разглеждане на многофакторните регресионни модели с всички диагностични тестове, системите едновременни уравнения и свързаните с тях концепции за ендеогенни и инструментални променливи, панелни модели, логистична регресия, анализ на времеви редове и свързаната с тях тестове за нестационарност. На лекциите и упражненията студентите се обучават да прилагат разглежданите методи с използване на софтуерния пакет Stata, включително и да програмират в него. Тези знания се очаква да бъдат приложени в задължителната курсова работа. Във втори курс като избираема дисциплина се предлага на студентите „Математика и статистика за икономисти“ (Part IIA Paper 6). Както вече беше посочено, всички изпити са в края на годината и затова дисциплина, която би следвало да се изучава един семестър, се обединява с друга такава. В случая, през зимния семестър се изучава математика за икономисти, а през летния - иконометрия, като курсът по иконометрия е силно математизиран и предполага програмиране с R и Matlab. Бъдещите икономисти могат да разширят знанията си по иконометрия в трети курс с избираемата дисциплина „Теория и практика на иконометрията II“ (Part IIB Paper 10). През зимния семестър по тази дисциплина се изучават методи за анализ на динамични редове и иконометрични модели за динамични редове, вкл. VAR модели, VEC модели, тестове за каузалност по Granger, тестове за коинтегрираност, системи едновременни уравнения, а през летния – приложение на метода на максималното правдоподобие и генерализирания метод на моментите за оценяване на моделите, модели с дискретни зависими променливи, модели на база панелни данни (модели с фиксирани и случайни ефекти, динамични панелни модели). Тази дисциплина има изцяло практическа насоченост като теоретичните постановки се илюстрират с примери от конкретни публикувани икономически изследвания (Course Structure | Faculty of Economics, 2022).

В Станфордския университет бъдещите икономисти, като част от фундамента, изучават задължително дисциплината „Приложна иконометрия“ (Econ 102B). В нея се започва с разширяване на знанията по темите за статистическо оценяване и проверка на статистически хипотези и след това се разглежда регресионния анализ с всички необходими тестове, проблемът с пропуснатите променливи, мултиколинеарност, системи едновременни уравнения и използването на инструментални променливи. След фундамента в зависимост от желаната област за специализация, студентите могат да изберат пет дисциплини. В списъка на изборните специални дисциплини присъстват две иконометрични: „Теми за напреднали в иконометрията“ (102C) и „Иконометрични методи за анализ на публичната политика и вземане на бизнес решения“ (102D). Темите, които се разглеждат по първата дисциплина са от панелната иконометрия, probit, logit и Tobit модели, Bootstrap и оценяване чрез симулации. Представят се примери за практическото приложение на изучаваните методи в областта на икономиката на труда и публичните финанси. По втората изборна дисциплина освен класическите иконометрични методи се изучават методи за проектиране на рандомизирани контролирани проучвания и анализ на получените данни, съвременни техники за машинно обучение и симулации. При преподаването се използва езика за програмиране R (Courses | Department of Economics, 2022).

В Масачузетския технологичен институт дисциплината „Иконометрична наука за данните“ (14.32 Econometric Data Science) е задължителна и заменя „Иконометрия“ (код 14.32) в учебния план на бъдещите икономисти с бакалавърска степен. В нея освен темите, които се включват стандартно в курсовете по въведение в иконометрията, се разглеждат още панелни модели, модели на разликата в разликите (differences-in-differences (DD) model), регресия с дизайн на прекъсване (regression discontinuity design (RDD)) и др. Емпиричният анализ се реализира със софтуерния пакет Stata. За да бъде признат този изпит за получаване на бакалавърска степен по икономика, той трябва да е взет с оценка не по-ниска от С. Препоръчва се това да бъде във втори курс през пролетния семестър. Студентите, които искат да разширят знанията си по иконометрия, могат да изберат „Иконометрия за напреднали“ (код 14.36) като една от избираемите дисциплини. Темите, които се разглеждат включват: нелинейна регресия, непараметрична регресия, логистична регресия, probit и Tobit модели, полупараметрична регресия, панелни модели, регресионен анализ с дискретна зависима променлива, модели на избора (choice models), модели на продължителността (duration models), инструментални променливи и др. (MIT Economics: Undergraduate Program, 2022).

В Националния университет на Сингапур обучението по иконометрия започва със задължителната дисциплина „Иконометрия I“ (код EC3303). Разглежда се подробно регресионния анализ с предпоставките за приложение на метода на най-малките квадрати, проблемите, възникващи при нарушаването им и мерки, които трябва да се предприемат. Набляга се на практическото приложение на методите и интерпретация на резултатите, получени при използване на статистически софтуер (Eviews или Stata). Студентите, които проявяват интерес, могат да продължат с „Иконометрия II“ (код EC3304), в която

се разглеждат модели с разпределени лагове, панелни модели, probit, logit и Tobit модели с използване на статистическия софтуер Stata. Самият софтуер Stata се изучава в отделна изборна дисциплина „Инструменти за програмиране за икономиката“ (EC3305 Programming Tools for Economics). На последния етап от обучението си студентите трябва да изберат дисциплини от ниво 4000 или по-високо, които сумарно дават поне 20 кредита (обикновено тези дисциплини носят по 4 или 5 кредита всяка). В списъка на тези избираеми дисциплини присъстват: „Иконометрия III“ (код EC4303), „Икономическо и финансово прогнозиране“ (код EC4304) и „Приложна иконометрия“ (код EC4305) (NUSMods, 2022).

В Калифорнийския университет – Бъркли бъдещите икономисти като част от фундамента изучават задължително една иконометрична дисциплина, която трябва да бъде избрана от двете предложени: ECON 140 (Иконометрия) и ECON 141 (Иконометрия – силно математизирана). Темите, разглеждани в двата курса са едни и същи и включват: линейна регресия с всички предпоставки за приложение на метода на най-малките квадрати, инструментални променливи, панелни модели и модели на времеви редове. Разликата е в начина на преподаването им. Курсът ECON 141 е по-теоретичен и математизиран. При обучението се използва софтуерният продукт Stata. Студентите могат да продължат изучаването на иконометрията с предложените три иконометрични дисциплини: ECON C142 (Приложна иконометрия и публична политика), ECON 143 (Иконометрия: методи за напреднали и приложения) и ECON 144 (Финансова иконометрия). Те са включени в списъка на избираемите дисциплини, от които бъдещите икономисти трябва да изберат пет (Major Requirements, 2022).

В Йейлския университет студентите задължително изучават една иконометрична дисциплина, която по техен избор може да бъде самостоятелна Econ 136 (Иконометрия) или да включва теми от статистиката и Data Science - Econ 117 (Въведение в анализа на данни и иконометрията) и Econ 123 (Анализ на данни и иконометрия за средно напреднали). За студентите, които през последната година от обучението си ще разработват курсова работа в спецсеминара (Econ 491 и Econ 492 The Senior Essay), е задължително да изберат два курса по иконометрия, като единият от тях задължително трябва да включва анализ на данни. Студентите, които проявяват интерес в областта на иконометрията, след като са преминали двата иконометрични курса или курс по статистика и курс по иконометрия, могат да изберат и някои от надграждащите курсове: Econ 491 (Финансова иконометрия за времеви редове), Econ 438 (Приложна иконометрия: политика, спорт, макроикономика) и Econ 439 (Приложна иконометрия: прогнозиране в макроикономиката и финансите). Те са включени в списъка на избираемите курсове, от които студентите задължително трябва да изберат два (Economics < Yale University, 2022).

В университета „Бокони“ бъдещите икономисти задължително изучават една иконометрична дисциплина: „30462 – Иконометрия“ (за спец. „Икономика и социални науки“ и „Икономика, мениджмънт и компютърни науки“) или „30284 – Емпирични методи за икономиката (Въведение в иконометрията)“ (за спец. „Международна икономика и финанси“ и „Международна икономика и мениджмънт“). Темите, които се изучават, включват: линейна регресия със съответните диагностични тестове, генерализиран метод на най-малките

квадрати, инструментални променливи, logit, probit, и Tobit модели, панелна регресия. Изучаваните методи се прилагат с помощта на EViews, Stata, Matlab или R. Освен задължителната иконометрия, студентите могат да изберат още две иконометрични дисциплини („30188 – Въведение във финансовата иконометрия“ и „30166 – Иконометрия за времеви редове“), които са включени в списъка на избираемите дисциплини в трети курс. При изучаването на първата се предвижда програмиране на Python, а при втората - основно се използва Eviews (Bachelor of Science Programs - Bocconi University Milan, 2022).

Обучението по иконометрия в трите разглеждани висши учебни заведения¹ в България е слабо застъпено. В ИУ - Варна единствената иконометрична дисциплина е „Финансова иконометрия“, която по настоящем е задължителна за специалност „Финанси“, но в новия учебен план вече е избираема дисциплина. В УНСС „О2034 Иконометрия“ е избираема дисциплина във втори курс, четвърти семестър, като е включена в един блок с дисциплините: „О2035 Недвижима собственост“, „О2036 Финансов контрол“ и „F2037 Физкултура и спорт - 2 курс“ (УНСС :: Направления и специалности, 2022). В СА "Д. Ценов" като се изключи специалност „Бизнес статистика и анализи“, останалите икономически специалности не изучават иконометрия (Свищов, 2022).

Заключение

От направения преглед на учебните планове и достъпните онлайн учебни програми по включените в учебните планове статистически и иконометрични дисциплини в десетте разглеждани топ университета и трите български университета, обучаващи икономисти, могат да бъдат направени следните изводи:

1. В разглежданите топ университети статистиката се изучава като задължителна дисциплина, като в голяма част от тях на студентите се предоставя възможност за избор на дисциплина, която съответства на тяхната предварителна подготовка и желанието им за посещаване на по-теоретичен и математизиран курс или курс с предимно практическа насоченост. В българските университети студентите нямат право на такъв избор и единствените разлики в обучението им произтичат от преподавателския екип.

2. В част от топ университетите статистиката се изучава два семестъра, а в други на студентите силно се препоръчва да запишат втори статистически курс.

3. Обединяването на статистиката с други дисциплини има формален характер и е свързано най-вече със специфичната организация на учебния процес, например изпити само в края на годината. Това обединяване не води до намаляване на хорариума.

4. В разглежданите топ университети иконометрията се изучава като задължителна дисциплина, като след нея студентите, които проявяват интерес имат възможност да изберат една или повече от множеството надграждащи иконометрични дисциплини. За разлика от тях, в българските университети, иконометрията не се изучава или е включена в блок на избираеми дисциплини, от който вероятността да бъде избрана е много малка.

5. При обучението по почти всички статистически и иконометрични дисциплини в разглежданите топ университети се използва статистически и иконометричен софтуер, като в голяма част от случаите се изисква програмиране

с цел реализация на изучаваните методи. Само в един от университетите се преподава статистически и иконометричен софтуер в отделна дисциплина.

БЕЛЕЖКИ

1. От разглеждането се изключват специалностите „Бизнес статистика и анализи“ в СА "Д. Ценов" и „Статистика и иконометрия“, „Анализ на бизнес данни със специализиран софтуер“ и „Бизнес информатика и комуникации“ в УНСС.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Catalog.yale.edu. 2022. Economics < Yale University. [online] Available at: <<http://catalog.yale.edu/ycps/subjects-of-instruction/economics/>> [Accessed 20 August 2022].
2. Department of Economics. 2022. Major Requirements. [online] Available at: <<https://www.econ.berkeley.edu/undergrad/current/major-requirements>> [Accessed 20 August 2022].
3. Econ.cam.ac.uk. 2022. Course Structure | Faculty of Economics. [online] Available at: <<https://www.econ.cam.ac.uk/apply/ba-economics/course-structure>> [Accessed 20 August 2022].
4. Economics.harvard.edu. 2022. Concentrator Guide. [online] Available at: <<https://economics.harvard.edu/concentrator-guide>> [Accessed 20 August 2022].
5. Economics.mit.edu. 2022. MIT Economics: Undergraduate Program. [online] Available at: <<https://economics.mit.edu/under/majors/14-1>> [Accessed 20 August 2022].
6. Economics.stanford.edu. 2022. Courses | Department of Economics. [online] Available at: <<https://economics.stanford.edu/courses>> [Accessed 20 August 2022].
7. Economics.stanford.edu. 2022. Major | Department of Economics. [online] Available at: <<https://economics.stanford.edu/major>> [Accessed 20 August 2022].
8. Hotelling, H. (1940). The Teaching of Statistics. The Annals of Mathematical Statistics, 11(4), pp. 457-470.
9. Lambova, M. (2020). Digitalizatsiyata - blagodat ili proklyatie za statisticheskoto obrazovanie. Ikonomicheska nauka, obrazovanie i realna ikonomika: Razvitie i vzaimodeystvia v digitalnata epoha: Yubileyna mezhdunarodna nauchna konferentsia, Varna: Nauka i ikonomika, 4, 378 - 386.
10. Lse.ac.uk. 2022. BSc in Economics. [online] Available at: <<https://www.lse.ac.uk/resources/calendar2021-2022/programmeRegulations/undergraduate/2021/BScEconomics.htm>> [Accessed 20 August 2022].
11. Nusmods.com. 2022. NUSMods. [online] Available at: <<https://nusmods.com/modules/>> [Accessed 20 August 2022].
12. Ox.ac.uk. 2022. Economics and Management | University of Oxford. [online] Available at: <<https://www.ox.ac.uk/admissions/undergraduate/courses/course-listing/economics-and-management>> [Accessed 20 August 2022].

13. Svishtov, S., 2022. — SA "D. A. Tsenov". [online] Stopanska akademia "Dimitar A. Tsenov" - Svishtov. Available at: <<https://www.unisvishtov.bg/bg/education/bachelor/bachelor-documentation>> [Accessed 20 August 2022].
14. Unibocconi.eu. 2022. Bachelor of Science Programs - Bocconi University Milan. [online] Available at: <https://www.unibocconi.eu/wps/wcm/connect/bocconi/sitopubblico_en/navigation+tree/home/programs/bachelor+of+science/> [Accessed 20 August 2022].
15. Unwe.bg. 2022. UNSS :: Napravlenia i spetsialnosti. [online] Available at: <<https://bit.ly/UNWE-napravlenia-i-spetsialnosti>> [Accessed 20 August 2022].

MS EXCEL AS A TOOL FOR TEACHING HYPOTHESIS TESTING IN STATISTICS

Chief Assist. Prof. Svetlana Todorova, PhD

University of Economics – Varna, Bulgaria

Chief Assist. Prof. Dimitria Karadimova, PhD

University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: Today teaching statistics is based on the manipulation of large amounts of data from the Internet, company sources, public sources, and others. Students must learn how to extract useful information from a big data set and to make a decision. In Statistics, a hypothesis test is used to test some assumptions about an unknown population parameter based on sample data. There are many different types of hypothesis test depending on the type of data you are working with and the goal of your analysis. The aim of this paper is to illustrate how to use Excel's Analysis ToolPak for hypothesis testing. MS Excel is widespread, user-friendly, easy to learn, and powerful. Therefore, this paper present how free Analysis ToolPak add-in works and what it can do. In one hand Analysis ToolPak is powerful, but in the other hand it has some weaknesses that we should be aware of.

Keywords: MS Excel; Data Analysis ToolPak; Hypothesis test: t-test; statistical significance; Effect size

JEL code: C12, C88

MS EXCEL КАТО ПОМОЩНО СРЕДСТВО ПРИ ПРЕПОДАВАНЕТО НА СТАТИСТИЧЕСКИ ХИПОТЕЗИ

Гл. ас. д-р Светлана Тодорова

Икономически университет - Варна, България

Гл. ас. д-р Димитрия Карадимова

Икономически университет - Варна, България

Въведение

Съвременните програми по статистика включват изследвания, основани на големи масиви от данни от Интернет, фирмени източници, публични източници, статистически справочници и др. Статистическият анализ на данни и в частност проверката на статистически хипотези, включват много на брой наблюдения и изисква от студентите не само задълбочени знания за статистическите методи, но и познаване на статистически софтуер за осъществяване на обработката им. В широк смисъл статистически е всеки софтуер, който е в състояние да обработва статистическа информация и притежава възможности за изчисляване на обобщаващи характеристики. В тесен смисъл статистически е всеки софтуер, който притежава възможности за изчисляване на обобщаващи характеристики от основните дялове на теоретичната статистика – анализ на емпирични разпределения, статистически заключения, анализ на корелационни зависимости и др. (Хаджиев, 2009, с. 9-10).

MS Excel е широко използван софтуер за статистически анализ на данни, представени във вид на електронни таблици и намира приложение при обработка на големи масиви от данни. Той предоставя възможности за графично изобразяване на данните и дава възможност за реализиране както на основни статистически функции, така и на комплексен статистически анализ с модула Data Analysis. MS Excel е добър избор, защото той е леснодостъпен, спестява време, осигурява лесен обмен на данни с други приложения, визуализира много добре графично и таблично крайните резултати и др.

Всяка следваща версия на MS Excel добавя нови възможности за графично представяне и интерпретация на данни като Box & Whisker, Histogram, Scatter (X, Y), Trendline и др. В MS Excel съществуват две възможности за приложение на статистически методи: основни статистически функции и модула Data Analysis. Функциите, които също се обновяват периодично в новите версии на продукта са достъпна от раздел Formulas, група Statistical Functions (Сълов и др., 2019, с. 137-140). Обработката на данните по този начин се извършва чрез вградени функции, които участват във формули за определяне на съдържанието на дадена клетка. Модулът Data Analysis съдържа 19 инструмента за различни статистически анализи и тестове, които позволяват извършването на един по-комплексен статистически анализ. Функционалността и потребителският интерфейс на Analysis ToolPak обаче, са същите от десетилетия. Любопитно е, че предвид все по-голямото внимание на Microsoft към анализа на данни и съсредоточаването му върху подобряване на функциите и добавянето на нови диаграми за анализ на данни, защо запазва Analysis ToolPak такъв, какъвто е.

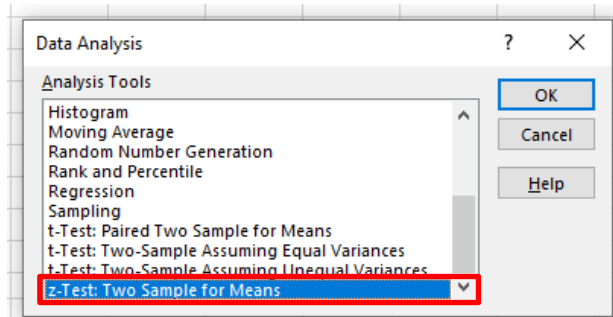
Целта на този доклад е, въпреки някои от слабите страни на Analysis ToolPak, да се илюстрира лекотата и достъпността на Analysis ToolPak за проверка на статистически хипотези.

В настоящия доклад се ограничаваме само до описание на възможностите на специализирания модул Data Analysis в MS Excel за проверка на статистически хипотези. Той допълва наличната функционалност на електронната таблица, като добавя мощни възможности за извършване на статистически анализ (Славева и др., 2016, с. 522-523). Обръща се специално внимание на предимствата и недостатъците на основните тестове за проверка на статистически хипотези за разлика между средни от две генерални съвкупности при независими и при взаимнозависими извадки и илюстрирането им с подходящи примери. Преди да се започне с използването на Analysis ToolPak, той обаче, трябва да бъде зареден, чрез Add-ins.

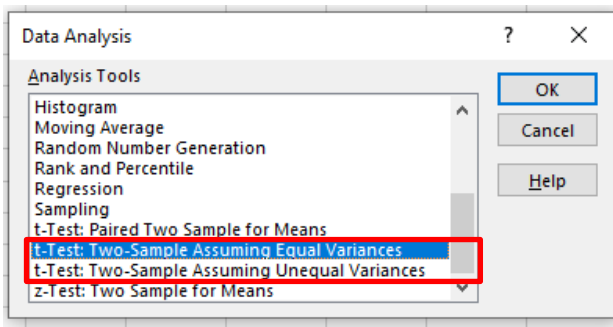
1. Проверка на статистически хипотези за разлика между средни от две генерални съвкупности при независими извадки

Статистическата проверка на хипотези за разликата между две средни се прилага, за да се определи дали средната разлика между двете генерални съвкупности (групи) е наистина значима или се дължи на случайни фактори. Например приложението на тази статистическа хипотеза може да определи дали средната успеваемост на студентите е различна, по-висока или по-ниска при приложението на два различни метода на преподаване. Първата стъпка е определяне на нулевата и алтернативната хипотези. Нулевата хипотеза е хипотеза

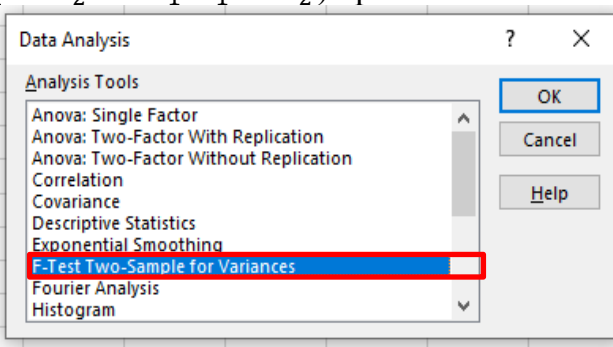
за нулев ефект, а алтернативната показва, че тази разлика е различна, по-голяма или по-малка от дадена стойност като това се указва от знака в алтернативната хипотеза ($\neq$; $>$; $<$). При проверката за разликата между две средни се разглеждат два сценария. Първо ако дисперсиите на двете генерални съвкупности, от които са извлечени извадките, са известни се използва Нормалното разпределение или z-тест при статистическите заключения:



Трябва да се отбележи, че въпреки че този тест се използва твърде рядко и почти липсва в повечето статистически софтуери като STATISTIKA или SPSS, тъй като почти винаги липсва информация за σ_1^2 и σ_2^2 , присъствието му в Excel е подходящо за целите на обучението. Второ ако дисперсиите на двете генерални съвкупности, от които са извлечени извадките са неизвестни, се използва t-разпределението на Студент или t-тест при статистическите заключения, но съществуват два случая: дисперсиите могат да се приемат за еднакви или се предполага, че са различни:



В общия случай при липса на информация за σ_1^2 и σ_2^2 трудно може да се направи предположение дали те са еднакви или различни и затова се препоръчва първо да се започне с проверка на статистическа хипотеза за равенство на дисперсиите ($H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ и $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) чрез F-теста:

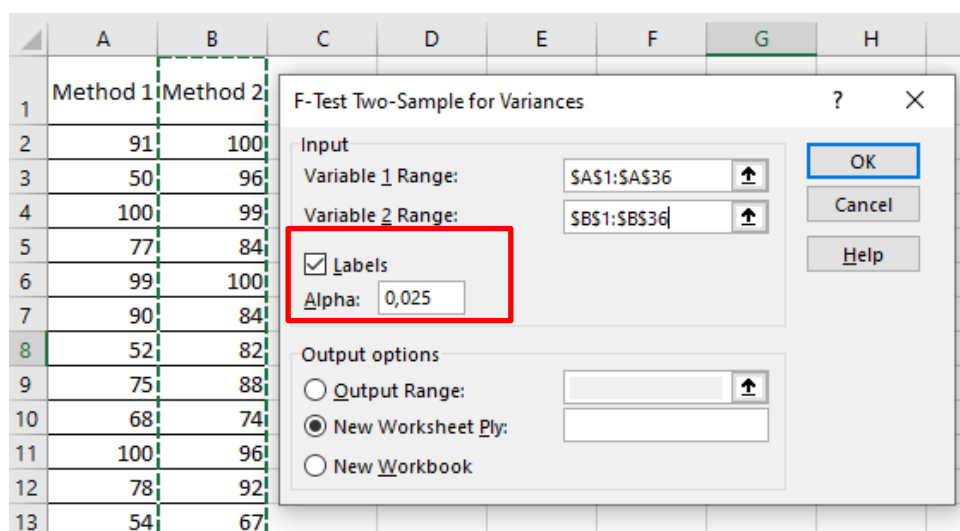


Трябва да се отбележи, че този тест в Excel е реализиран само при едностранна критична област, а така зададените хипотези изискват двустранна критична област. За да се избегне това неудобство ако при основната хипотеза е

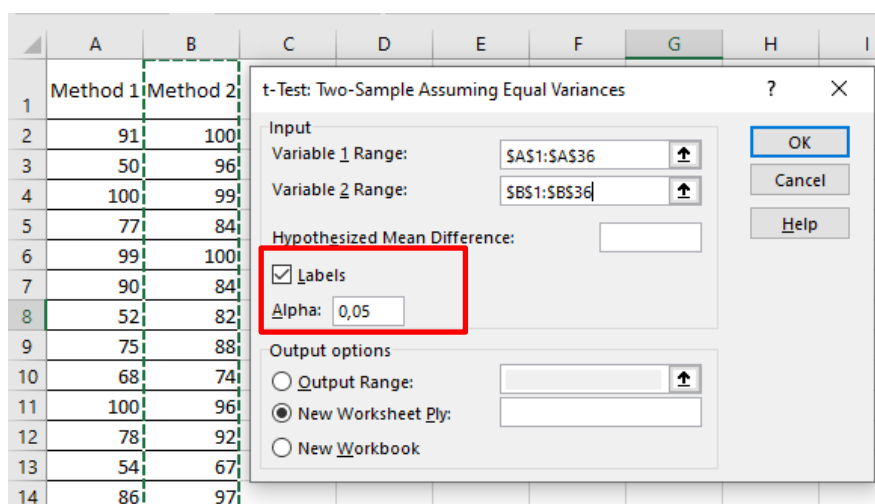
избрано равнище на значимост 0,05, то и при проверката за равенство на дисперсиите трябва да се избере същото равнище на значимост, но разделено на 2, тъй като тестът, който реализираме трябва да е при двустранна критична област и в полето за α да се запише 0,025 (0,05/2).

За представяне на проверката за средни от две независими извадки се използват данни от две случайни извадки, състоящи се от 35 студента всяка, съдържащи резултати от тестове на студенти, които са се обучавали по два различни метода – класически (Method 1) и иновативен (Method 2) като се проверява дали иновативният метод е по-успешен от класическия при равнище на значимост 0,05.

Тъй като σ_1^2 и σ_2^2 са неизвестни, се избира t-тест, а за да се направи допускане дали дисперсиите са еднакви или не, се използва F-тест. Данните се въвеждат чрез маркиране като е препоръчително да се включи и името на променливата като се даде отметка на Labels. Избира се равнище на значимост 0,025 и по подразбиране резултатите се появяват на нов работен лист. Получават се следните резултати:



	A	B	C
1	F-Test Two-Sample for Variances		
2			
3		<i>Method 1</i>	<i>Method 2</i>
4	Mean	78,97142857	84,97142857
5	Variance	241,4403361	164,9109244
6	Observations	35	35
7	df	34	34
8	F	1,464065143	
9	P(F<=f) one-tail	0,135666283	
10	F Critical one-tail	1,981119274	



	A	B	C
1	t-Test: Two-Sample Assuming Equal Variances		
2			
3		<i>Method 1</i>	<i>Method 2</i>
4	Mean	78,97142857	84,97142857
5	Variance	241,4403361	164,9109244
6	Observations	35	35
7	Pooled Variance	203,1756303	
8	Hypothesized Mean Difference	0	
9	df	68	
10	t Stat	-1,760899081	
11	P(T<=t) one-tail	0,041375703	
12	t Critical one-tail	1,667572281	
13	P(T<=t) two-tail	0,082751406	
14	t Critical two-tail	1,995468931	

Статистическата проверка на хипотези за равенство на дисперсиите може да се извърши чрез класическия подход на критичните стойности като се сравнят емпиричната и теоретичната характеристики или като се използва p-value. От получените резултати ($1,464 < 1,981$ или $0,136 > 0,05$) следва, че нулевата хипотеза не може да се отхвърли и следователно е възможно да се допусне, че дисперсиите са еднакви. Това означава, че се избира: t-test:Two Sample Assuming Equal Variances. От приложението на теста се получават резултати на нов работен лист. Потребителят отново може да избере класическия подход на критичните стойности или p-value подхода при проверката на хипотезата, но тук вече резултати са при едностранна и при двустранна критични области. Тъй като се тества хипотезата, че новият метод в обучението е по-успешен, се избира ляво странна критична област. Трябва да се отбележи, че Excel представя като резултат само абсолютните стойности на теоретичните характеристики и затова ако например се работи с ляво странна критична област при сравняване на характеристиките, теоретичната се взема със знак „-“. Според резултатите по двата подхода ($-1,761 < -1,668$ или $0,04 < 0,05$) нулевата хипотеза се отхвърля в полза на алтернативната или разликата е статистически значима в полза на иновативния подход при равнище на значимост 0,05.

Когато се правят промени в начина, по който се преподава в един курс, често искаме да измерим въздействието на тези промени върху обучението на студентите. Има няколко различни обобщаващи характеристики, които могат да се използват, за да се сравни обучението в различни курсове при различни подходи на преподаването. В изследванията на социалните науки тази обобщаваща характеристика се нарича размер на ефекта. Размерът на ефекта е мярка за това колко важна е разликата: големите размери на ефекта означават, че разликата е важна; малките размери на ефекта означават, че разликата е маловажна. Ефектът на размера се получава като се нормира разликата между двете средни и дава мярка за това колко съществено се различават резултатите от различното преподаване в два курса.

Размерът на ефекта обаче, не е статистическата значимост. Докато значимостта показва колко вероятно е резултатът да се дължи на случайни фактори, то размерът на ефекта разкрива колко важен е резултатът. В статията „Изявление относно статистическата значимост и р-стойностите“, Американската статистическа асоциация обяснява, че статистическата значимост не е еквивалентна на научна, човешка или икономическа значимост. По-малките р-стойности не предполагат непременно наличието на по-големи или по-важни ефекти и по-големите р-стойности не означават липса на важност или дори липса на ефект. Всеки ефект, независимо колко малък е, може да доведе до малка р-стойност, ако размерът на извадката или прецизността на измерване е достатъчно висока, а големите ефекти могат да доведат до по-високи р-стойности, ако размерът на извадката е малък или измерванията са неточни (Wasserstein and Lazar, 2016).

Най-разпространеният обобщаващ показател за размера на ефекта е *Cohen's d* и се изчислява по следната формула:

$$d = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{S_{pooled}} \quad (1)$$

Ако стойностите му са по-малки или равни на 0,2 ефектът е малък ако са около 0,5 - ефектът е среден и ако са 0,8 и по-големи - ефектът е голям.

Ексел не предлага изчисляване на размера на ефекта, но на база на получените резултати това може да се изчисли допълнително като се приложи формулата в произволна свободна клетка:

	A	B	C	D	E	F
1	t-Test: Two-Sample Assuming Equal Variances					
2						
3		Method 1	Method 2			
4	Mean	78,97142857	84,97142857			
5	Variance	241,4403361	164,9109244			
6	Observations	35	35		= (C4-B4)/sqrt(B7)	
7	Pooled Variance	203,1756303				
8	Hypothesized Mean Difference	0				
9	df	68				
10	t Stat	-1,760899081				
11	P(T<=t) one-tail	0,041375703				
12	t Critical one-tail	1,667572281				
13	P(T<=t) two-tail	0,082751406				
14	t Critical two-tail	1,995468931				

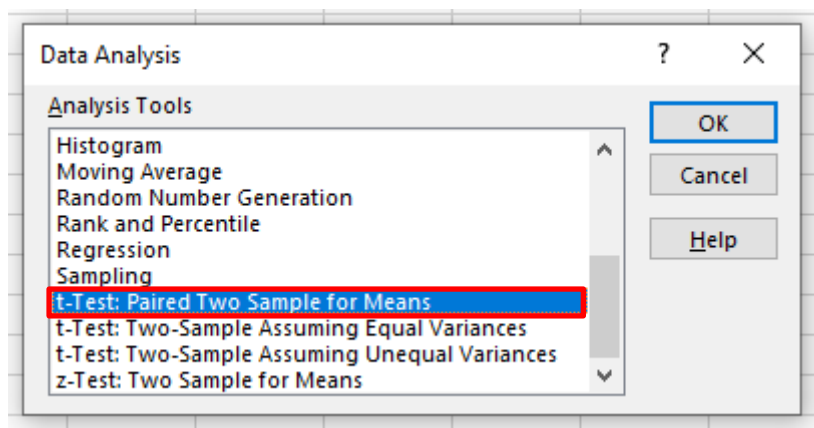


0.420935

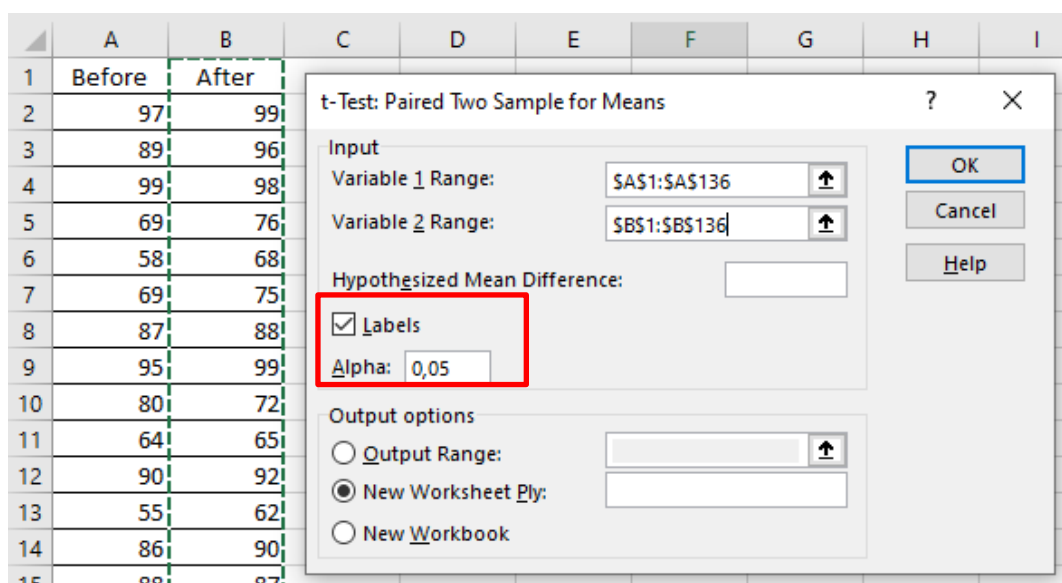
$Cohen's d = 0,42$ и показва, че размерът на ефекта от приложението на иновативния подход е среден.

2. Проверка на статистически хипотези за разлика между средни от две генерални съвкупности при взаимнозависими извадки

При проверката на статистически хипотези за разликата между средни при взаимнозависими извадки е характерно, че се реализират две измервания върху едни и същи статистически единици. Обемът на взаимнозависимите извадки е еднакъв. Тестът може да се приложи при наблюдения на статистическите единици преди и след някакво събитие по един и същи признак, например входно и изходно ниво на студентите по дадена дисциплина или резултати преди и след определен модул или курс на обучение.



Илюстрирането на проверката за средни от две взаимнозависими извадки се основава на наблюдение на 235 студенти преди и след приложението на нов метод на обучение като се проверява хипотезата, че новият метод на обучение е по-добър при равнище на значимост 0,05. Получават се следните резултати:



	A	B	C
1	t-Test: Paired Two Sample for Means		
2			
3		<i>Before</i>	<i>After</i>
4	Mean	79,8074074	81,7111111
5	Variance	190,156661	177,490547
6	Observations	135	135
7	Pearson Correlation	0,81012671	
8	Hypothesized Mean Difference	0	
9	df	134	
10	t Stat	-2,6440481	
11	P(T<=t) one-tail	0,00458489	
12	t Critical one-tail	1,65630454	
13	P(T<=t) two-tail	0,00916978	
14	t Critical two-tail	1,97782576	

Статистическата проверка на хипотези между средни от две генерални съвкупности при взаимнозависими извадки се извършва отново чрез t-теста. Подобно на предходните анализи, въвеждането на данни става чрез маркиране с или без етикети, а резултатите по подразбиране са на нов работен лист. Потребителят отново може да избере класическия подход на критичните стойности или p-value подхода при проверката на тази хипотеза, при едностранна или двустранна критични области. Тъй като се тества хипотезата, че новия метод на обучението е по-добър и се предполага, че студентите ще са по-подготвени след неговото приложение и ще покажат по-високи резултати, се определя ляво странна критична област, а при сравняване на характеристиките, теоретичната отново трябва да се вземе със знак „-“. Според резултатите по двата подхода $(-2,644 < -1,656$ или $0,0046 < 0,05)$ нулевата хипотеза се отхвърля в полза на алтернативната или разликата между преди и след приложението на новия метод на обучение е статистически значима при равнище на значимост 0,05, т.е. новият подход дава по-добри резултати.

Отново се задава въпросът какво е въздействието на промените в обучението върху студентите. Това въздействие се оценява чрез показателя за размера на ефекта. Чрез него се дава обобщаваща числова характеристика на размера на ефекта преди и след промените. Тъй като в резултатите на Excel S_{pooled} отсъства, но от друга страна винаги при взаимнозависимите извадки, двете извадки са с един и същ обем и следователно, за да се намери S_{pooled} може да се използват дисперсиите на двете извадки:

$$S_{pooled} = \sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{2}} \quad (2)$$

Формулата за размера на ефекта е:

$$d = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{S_{pooled}} = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{2}}} \quad (3)$$

	A	B	C	D	E	F
1	t-Test: Paired Two Sample for Means					
2						
3		Before	After			
4	Mean	79,807407	81,711111			
5	Variance	190,15666	177,49055			
6	Observations	135	135			
7	Pearson Correlation	0,8101267			=(C4-B4)/(sqrt(C5+B5)/2)	
8	Hypothesized Mean Difference	0				
9	df	134				
10	t Stat	-2,644048				
11	P(T<=t) one-tail	0,0045849				
12	t Critical one-tail	1,6563045				
13	P(T<=t) two-tail	0,0091698				
14	t Critical two-tail	1,9778258				

0.19857

$Cohen's d \approx 0,20$ и разкрива, въпреки че при новия подход в обучението студентите показват статистически значим по-висок среден резултат, то размерът на ефекта е слаб, т.е. постигнатият положителен резултат е много нисък и маловажен.

Заклучение

Докладът показва как с помощта на модула Data Analysis на MS Excel е възможно да се извършва една доста прецизна статистическа проверка на хипотези. Въпреки, че се налага да се правят допълнителни изчисления, да се пренареждат данни, да се разширяват изходните колони и други, то анализите се реализират сравнително бързо и лесно, и са достъпни за всички потребители на MS Excel. С всяка нова версия на MS Excel се добавят обновени и по-добри инструменти - нови функции или диаграми за анализ на данни, но подобрения в Analysis ToolPak няма. Загадка е защо Microsoft не изразходва и минималното време и средства, необходимо за обновяване и доразвития на Analysis ToolPak.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Cohen, J. (1992). A power primer. Psychological Bulletin, pp. 112, pp. 155–159
2. Ferguson, C. J. (2016). An effect size primer: A guide for clinicians and researchers. In A. E. Kazdin (Ed.), Methodological issues and strategies in clinical research, pp. 301–310
3. Hadzhiev, V. i dr. (2009). Statisticheski i ikonometrichen softuer. Varna: Univ. izd. Nauka i ikonomika.
4. McLeod, S. A. (2019, July 10). What does effect size tell you? Simply psychology: Available at: <https://www.simplypsychology.org/effect-size.html> (Accessed: 10 September 2022)
5. Salov, V. i dr. (2019). Informatika. Varna: Univ. izd. Nauka i ikonomika.
6. Slaveva, K. i dr. (2016). Usavarshenstvane na obuchenieto po statistika chrez izpolzvanе na savremenni informatsionni i komunikatsionni tehnologii. Almanah nauchni izsledvania, SA D. A. Tsenov – Svishtov, Izd. AI Tsenov, br. 23, s. 498-528

7. Todorova, S. (2019). Statistics for Data Analysis Using Microsoft Excel. Izvestia Journal of the Union of Scientists - Varna. Economic Sciences Ser. 2, pp. 68-74
8. Wasserstein R., Lazar, N. (2016) The ASA Statement on p-Values: Context, Process, and Purpose, The American Statistician, 70:2, pp. 129-133, DOI: 10.1080/00031305.2016.1154108
9. Winston, L. W. (2016) Microsoft Excel 2016. Data Analysis and Business Modelling. Washington: Microsoft Press.

STATISTICAL ANALYSIS OF LABOR PRODUCTIVITY IN THE BULGARIAN ECONOMY

Chief Assist. Prof. Silvia Gospodinova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Chief Assist. Prof. Dimitria Karadimova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *The report researches the labor productivity in the context of Bulgarian economy with the objective to establish the trends in its development in the recent few years. A comparative analysis has been carried out on the methods and the limitations of the estimation of labor productivity and its relation to the economic efficiency, the business cycle as well as other macroeconomic indicators. A leading trend in the development of labor productivity in Bulgaria has been identified through the application of statistical methods. Estimates have been made on the future values of labor productivity up until year 2024 providing that the established patterns persist.*

Keywords: *Labor productivity; Trend models; Forecasting; Economic efficiency*

JEL code: *C22, C32, E17*

СТАТИСТИЧЕСКИ АНАЛИЗ НА ПРОИЗВОДИТЕЛНОСТТА НА ТРУДА В БЪЛГАРИЯ

Гл. ас. д-р Силвия Господинова
Икономически университет - Варна, България

Гл. ас. д-р Димитрия Карадимова
Икономически университет - Варна, България

Въведение

Основна движеща сила за развитието на една пазарна икономика е повишаването на нейната ефективност, в основата на което е растежът на производителността на труда. Производителността на труда е индикатор, отразяващ количеството продукт, произведен от един работник или служител за единица време. За икономиката като цяло този показател отразява произведения БВП (БДС) от едно заето лице или за един отработен човекочас. Неговата стойност предопределя степента на икономическо развитие, размера на националното богатство, нивото на благосъстоянието, а също и качеството на живот в страната.

Целта на настоящия доклад е да се анализират тенденциите в развитието на производителността на труда в България за периода 2000-2021 година и да се направи прогноза за по-нататъшното ѝ развитие при условие, че установените закономерности се запазят. **Задачите**, които си поставяме в доклада са:

1) Да се опишат и обяснят понятията, методите и ограниченията, използвани при изчисляването на производителността на труда.

2) Да се анализират предимствата и недостатъците на показателите за измерване на производителността на труда.

3) Да се анализира общото развитие на тези показатели в България за посочения период.

4) Да се моделират тенденциите на развитие на производителността на труда и да се направят трендекстраполагационни прогнози.

Ръстът на производителността е ключова макроикономическа характеристика в дългосрочен план и важен определящ фактор за макроикономическата динамика в краткосрочен и средносрочен план. В дългосрочен план, според икономическата теория, растежът на производителността е основният източник за ръста на реалното производство на глава от населението и мярка за икономическо благосъстояние. В средносрочен план растежът на производителността на труда, заедно с нарастването на общия брой отработени часове, определя развитието на реалния ръст на производството. Освен това динамиката на производителността е ключов момент при анализа на колебанията на бизнес цикъла. Тенденцията в развитието на производителността може също така да бъде от значение за интерпретацията на развитието на други макроикономически променливи, включително инфлацията, валутните курсове и производството в краткосрочен и средносрочен план. Така например, тенденцията на растеж на производителността влияе върху извеждането на оптималната парична политика. В същото време този анализ не е особено лесен, а средносрочните последици от промяната в тенденцията на растежа на производителността на труда могат да варират значително и зависят от множество фактори, един от които е каква ще е реакцията на търсенето. При по-нисък растеж на производителността могат да намалеят очакванията по отношение на печалбите и реалните заплати, като по този начин най-вероятно ще намалеят инвестициите и потреблението и в краткосрочен план. Скоростта, с която се коригират очакванията е важна. Ако очакванията се променят бързо, разходите могат да реагират бързо, като по този начин се забавя спада в производителността на труда (Bernanke, 2005).

1. Същностни характеристики на производителността на труда, показатели и проблеми при измерването ѝ.

Производителността на труда е икономически показател, който съпоставя постигнатия резултат (новосъздадения продукт) с вложения трудов ресурс, при осъществяването на определена икономическа дейност на дадена територия за определен период от време. Основни съставни елементи на производителността на труда са показателите, измерващи резултата от осъществяваната дейност (числител) и показателите за вложения труд (знаменател).

На макро ниво резултатът от дейността се измерва най-вече чрез БВП и брутната добавена стойност (БДС) създадена от всички сектори в националната икономика или от отделните икономически дейности. За международни сравнения на производителността на труда е възприето да се използва БВП, докато БДС се прилага за изчисляване на производителността на труда на национално ниво, на ниво икономически сектори (дейности) или по региони.

Трудовият фактор в състава на показателя за производителността на труда се измерва с броя на заетите лица и отработеното от тях време – отработени човекочасове. По-предпочитаният показател е отработеното време измерено в човекочасове, тъй като по-точно представя фактически вложения труд в процеса на производството, а освен това може да обхване и заетите на непълен работен ден.

Съпоставянето на показателите за производителността на труда във времето налага елиминиране влиянието на цените в стойността на показателите за резултата от дейността. За целта БВП и БДС от текущия период се изчисляват по цени от базисен период. В настоящия доклад всички показатели са по цени от 2015 година.

Основна задача свързана с този показател (ПТ) е неговото реално нарастване. То може да се постигне по един от следните начини: резултата да нараства по-бързо от разходите за труд; резултата да нараства при неизменност на трудовия фактор; резултата да намалява с по-бавни темпове, отколкото намаляват трудоразходите; резултатите да останат неизменни, а разходите да намаляват; резултата да нараства, а разходите да намаляват.

Според целите на конкретното изследване и в зависимост от използваните измерители за продукцията и ресурса, могат да се конструират различни показатели за производителност, но общия му вид следния:

$$ПТ = \frac{\text{резултата от дейността}}{\text{трудова фактор (брой заети или отработени човеко часове)}} \quad (1)$$

Изборът между един или друг възможен показател зависи от целите, които си е поставил анализа, както и от наличието на съответните статистически данни.

Производителността на труда може да бъде изчислена по два начина – като отношение между реалния БВП на един зает или като отношение на БВП на един отработен час. Това са и едни от най-често използваните измерители за производителността от националните статистики и съответно налични в Евростат. Вторият показател е за предпочитане, ако имаме право на избор, тъй като елиминира влиянието на формата на заетост, т.е. дали заетостта е на пълен или непълен работен ден. И двата показателя са ясни и могат да се тълкуват лесно. Те са и най-често използваните в международната практика и не предизвикват недоверие и спорове.

ПТ на база брутен продукт изразява количеството на общата продукция (като физически единици), което се произвежда средно от единица трудов ресурс и съответно може да служи като индикатор за необходимостта от трудови ресурси за производството на определено количество обща продукция. ПТ на база добавена стойност, показва размера на стойността, която средно се добавя в производствения процес от единица трудов ресурс.

Динамиката на ПТ може да бъде проследена и чрез двата показателя. Обичайна практика при изследване изменението на ПТ е да се използват и индекси и съответно от тях лесно могат да се изчислят и процентните изменения. Изключително важно за правилната интерпретация на тези показатели е да се отчете, че те са частични индикатори на производителността, защото в тях се отразява съвместното действие на редица фактори, които влияят на

производителността. Изменението им във времето се дължи както на изменение на капацитета и интензивността на работа на трудовите ресурси, така и на изменение на обема на капитала, техническия прогрес, въплътен в средствата за производство, организационни подобрения, икономии от мащаба, изменение на степента на използване на производствените мощности и неизбежните в статистиката измерителни грешки. Затова, по-точно е да се каже, че *ПТ, като индикатор, показва всъщност колко ефективно живият труд се свързва с другите производствени фактори.*

Производителността на труда на база на тези два измерителя в отделните икономически дейности се агрегира на макрониво до производителност за цялата икономика и съответно до среден доход на един зает, което в крайна сметка е измерител на жизнения стандарт в съответната страна и е от голямо значение за макроикономическата политика.

Когато се изчислява производителност на труда, като входящ ресурс се използва количеството на вложения в производството труд, което статистически може да се отчете чрез четири показателя: брой отработени човекочасове, брой заети, приравнени на пълен работен ден, брой заети и брой наети. Данни за четирите показателя са налични от НСИ, но в съответствие с теорията на производството най-подходящ от изброените показатели за количеството на вложения труд са отработените човекочасове, тъй като в този показател се включват действително отработените часове, допълнително отработените часове, времето на работното място, използвано за подготовка на работата, работата по поддръжката и ремонта, почистването и подготовката на инструментите, времето, съответстващо на кратките периоди за почивка на работното място, а също и времето прекарано на работното място в очакване или в готовност поради временна липса на работа, повреда на машините и апаратурите.

Отчитането на този показател от НСИ и в международната практика неминуемо среща определени технически трудности, свързани с това, че данните се събират от два източника – Изследване на работната сила и Отчет на наетите лица, отработеното време, средствата за работна заплата и други разходи за труд, а това може да доведе до неточности и несъответствия и затова се налагат допълнителни оценки и синхронизиране на данните от двата статистически източника.

Изследването на работната сила се осъществява сред домакинствата и от социално-икономическа гледна точка, с цел да установи такива характеристики на работната сила като възраст, образование, втора работа, видове трудови договори и др. Докато отчетите за наетите лица и отработеното време произтичат от предприятията и в тях работната сила се разглежда като производствен фактор – те отчитат работни места, а не заети.

Например, работник, който работи на повече от едно място, в това изследване ще бъде преброен повече от един път. Също така, данните обикновено се събират от фирми, които са над определен размер, т.е. няма пълно покритие на дадена икономическа дейност. Освен това, самото определяне на икономическата дейност може да има несъответствия и да е неточно, защото при Изследването на работната сила то зависи от отговорите на респондентите, а не от твърдата административна класификация, както е при Отчетите от предприятията. Друго

различие в тези два източника на данни може да произтича и от възможно различно третиране на понятието „действително отработени часове на нормално работно време“. В Изследването на работната сила често пъти респондентите разглеждат като нормално работно време и това работно време, което е повече от стандартното, но не е регулярно. Има примери в икономическата литература, които сравняват резултати относно нормалното работно време от изследвания на работната сила и от отчети на предприятията. В повечето случаи нормалното работно време от Изследването на работната сила е повече, отколкото е нормалното работно време от отчетите на предприятията.

Допълнителни проблеми съществуват и при отчитането на отработените човекочасове, тъй като тяхното прецизно отчитане е възможно само тогава, когато става дума за работещи на почасово заплащане. Отчитането на отработените човекочасове на работници и служители, които са на месечна заплата е по-трудно, защото от гледна точка на производствените разходи се приема, че те работят в рамките на договореното нормално работно време, докато фактически отработените от тях човекочасове може да са различни.

Най-съществените различия между количеството на вложения труд, измерено чрез брой хора и чрез отработените човекочасове се дължат на отсъствия по болест и отпуск и празничните дни. Размерът на отпуските и празничните дни може да се оцени на база на действащите към момента нормативни документи или на база на масови трудови споразумения (ако има такива). Този размер може също да се оцени и от анкетите в Изследването на работната сила, което също може да доведе до несъответствия, грешки и пропуски. Сравнителни аналитични материали от международната практика показват, че в Изследването на работната сила има тенденция отработените часове да се надценяват, а да се подценява отсъствието от работа, което се дължи на болнични или празнични дни.

Изброените възможни неточности при отчитането на отработените часове пораждат статистически грешки на измерванията, които са неизбежни. Те биха могли да се окажат по-съществен проблем само при евентуални международни сравнения със страни, които работят по различни методологии за отчитането и оценяването на изброените специфики. Когато става дума обаче за данни за икономика, в която статистическата отчетност работи систематично по една методология, тези неточности са малки и биха могли да се проявят по-съществено само при смяна на методологията. От тази гледна точка, за целите на изследването на производителността на труда в България, при наличието на възможност, следва да се предпочита като показател „броят на отработените човекочасове“ пред останалите възможности за измерване на количеството труд, което се влага в производствения процес.

Останалите показатели по принцип отстъпват по своята информационна стойност. Най-ниска такава има показателят „брой наети“ и поради това той следва да се използва само когато по една или друга причина липсват данни за останалите показатели. Той не отчита нито промените в средното работно време, нито възможността да има наети, които работят на повече от едно работно място, нито самонаетите в съответната сфера и неплатените семейни работници, ако има такива.

По-висока информационна стойност има показателят „брой заети“, но и той отстъпва на показателя „брой отработени човекочасове“, защото средното отработено време може да се променя, когато се променят броя на дните за платен отпуск, броя на официалните празници или когато се променя броя на хората, работещи на непълен работен ден.

Показателят „брой заети, приравнени към пълен работен ден“ по дефиниция се получава като броят на отработените човекочасове се раздели на средногодишния брой на часовете, които съответстват на заетост при пълен работен ден. В този случай, работещите на непълен работен ден се отчитат пропорционално с по-ниско тегло от работещите на пълен работен ден и поради това този показател преодолява недостатъка на показателите „брой наети“ и „брой заети“, които отчитат всички работещи еднакво. Следователно, той има по-висока информационна стойност от тях, но все пак отстъпва на показателя „брой отработени човекочасове“, защото не отчита промените в отработените човекочасове от работници на пълен работен ден, дължащи се на възможни промени в законодателството или в колективните трудови договори.

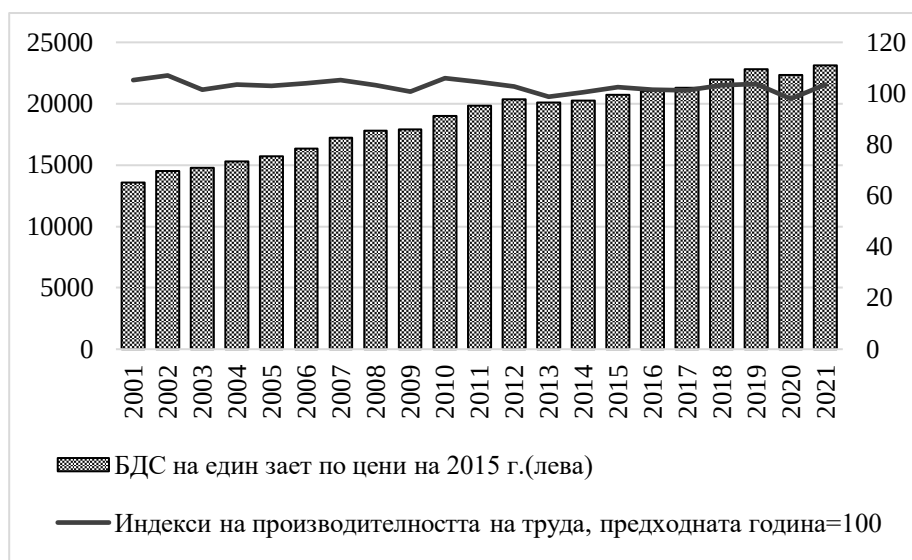
За да бъде коректно измерването на измененията на производителността на труда в динамика е необходимо да се елиминира влиянието на цените на произведената продукция. Затова показателят за производствения резултат - брутната добавена стойност е по постоянни цени.

Следователно, за икономиката като цяло най-точно изчисляване на производителността на труда и на нейната динамика във времето може да се получи чрез показателите – брутна добавена стойност на един зает по базисни цени, брутна добавена стойност на един отработен човекочас отново по базисни цени, а също и чрез използването на верижни индекси.

2. Статистически анализ на тенденцията на развитие и прогнозиране на производителността на труда в България

Средногодишно реалната ПТ, измерена чрез БДС на едно заето лице, се увеличава с 2,82% или в абсолютно изражение с 486,39 лева добавена стойност на едно заето лице. В сравнение с базисната 2000 г., ПТ се увеличава през всяка следваща година, като в края на периода ръстът достига 79,22% или увеличение с 10214 лева добавена стойност на един зает. Верижните индекси (фигура 1) също показват нарастване през периода, като изключение се наблюдава през 2013 г. и 2020 г., когато добавената стойност на един зает намалява съответно с 1,20% и 2,08%. Забавянето на ръста на производителността на труда през посочените периоди е отражение на глобалната финансова криза, ефектът от която в България настъпва по-късно и пандемията от COVID-19.

При производителността на труда, измерена чрез БДС на един отработен човекочас се наблюдава подобна тенденция на развитие. Прави впечатление, че отрицателен прираст на добавената стойност се наблюдава единствено през 2013 г. спрямо предходната година. Средногодишно БДС на един отработен човекочас се увеличава с 2,88% или с 0,31 лева. В края на изследвания период се регистрира реален ръст от 81,55%, който представлява увеличение с 6,40 лева добавена стойност на едно заето лице.



Фиг. 1. Динамика на БДС на едно заето лице за периода 2001-2021 г.

Източник: Данни на НСИ и изчисления на автора

Анализът на показателите за характеризиране на общото развитие на производителността на труда, измерена и по двата начина, показва ясно изразена тенденция на нарастване на реалния ѝ размер. Втората и не по-малко важна задача след идентифицирането на тренда е неговото аналитично изразяване чрез полиномиални модели, вътрешнолинейни и вътрешнонелинейни функции, и използването им за нуждите на анализа и най-вече прогнозирането (Русев, 1999). Тенденцията на развитие се представя като повече или по-малко плавна линия, която се нарича тренд. Формира се под влияние на съществени, трайно действащи причини, които определят посоката на развитие на икономическото явление. Допуска се, че отклоненията от тренда са израз на случайни колебания или на неопределени и хаотични кратковременни въздействия (Ламбова и др., 2012).

Статистическият анализ на тенденцията на развитие на ПТ има за цел да се покажат закономерностите на развитие от една страна, а от друга да се използва за прогностични цели. Експериментирани са девет трендови модела. Чрез тях развитието в ПТ се представя като функция на времето. Описва се с аналитични функции, които съответстват на вида на проявяващата се тенденция на развитие. От формално алгоритмична гледна точка трендовите модели съответстват на регресионните модели при регресионния анализ. Трябва да се има предвид, че между тях има съществени различия по отношение на практическата им интерпретация (Манов, 2001). Стойностите на ПТ представляват зависимата променлива, а времето се определя като независима променлива в моделите. За установяване и моделиране на тенденцията на развитие се прилага методът на конкуриращите се модели. Като основен критерий за избор на най-подходящ модел се прилага коефициентът на детерминация (R^2). Той е универсален измерител на обяснителната способност на даден модел. Сравняват се коефициентите на детерминация за оценка на степента на адекватност на конкуриращите се модели. За най-подходящ се определя моделът с най-висока стойност. В научната литература се препоръчва спазването на принципа на опростеното моделиране, според който при сравнително близки резултати от два

експериментирани модела, се избира този, който има по-лека функционална форма (Гоев и др., 2019).

От експериментираните трендови модели на ПТ, измерена с БДС на едно заето лице, най-висока обяснителна способност имат квадратичният и кубичният, при които коефициентът на детерминация има стойност 0,990. Проверката на статистически хипотези с помощта на теста на Фишер (таблица 1) при риск за грешка от първи род ($\alpha=0,05$) показва, че и двата модела са адекватни.

Таблица 1

Трендови модели, описващи динамиката на производителността на труда, измерена чрез БДС на едно заето лице по цени от 2015 г.

№	Модели	Функционална форма	Коефициент на детерминация RSquare	F _{емп.}	Равнище на значимост Sig
1.	Линеен (Linear)	$\hat{Y}_i = b_0 + b_1.t_i$	0,976	824,694	0,000
2.	Логаритмичен (Logarithmic)	$\hat{Y}_i = b_0 + b_1.\ln(t_i)$	0,910	202,902	0,000
3.	Реципрочен (Inverse)	$\hat{Y}_i = b_0 + b_1.(1/t_i)$	0,551	24,539	0,000
4.	Квадратичен (Quadratic)	$\hat{Y}_i = b_0 + b_1.t_i + b_2.t_i^2$	0,990	936,533	0,000
5.	Кубичен (Cubic)	$\hat{Y}_i = b_0 + b_1.t_i + b_2.t_i^2 + b_3.t_i^3$	0,990	591,595	0,000
6.	Степенен (Power)	$\hat{Y}_i = b_0.t_i^{b_1}$	0,943	332,493	0,000
7.	Експоненциален (Exponential)	$\hat{Y}_i = b_0 \exp(b_1.t_i) = b_0 e^{b_1.t_i}$	0,956	439,006	0,000
8.	S-curve	$\hat{Y}_i = \exp(b_0 + b_1 / t_i) = e^{b_0 + b_1 / t_i}$	0,610	31,345	0,000
9.	Логистичен (Logistic)	$\hat{Y}_i = \frac{1}{1/u + b_0.b_1^{t_i}}$	0,956	439,006	0,000

За квадратичния модел $F_{\text{емп.}}(936,533) > F_{\text{теор.}}(3,522)$, а за кубичния $F_{\text{емп.}}(591,595) > F_{\text{теор.}}(3,160)$. Всички модели имат равнища на значимост $\text{Sig.} = 0,000 < 0,05$, при които нулевата хипотеза (H_0) може да се отхвърли в полза на алтернативната (H_1), т.е. може да се приеме, че са адекватни.

Проверката на статистически хипотези за значимост на параметрите на моделите с помощта на t-критерия на Стюdent (или равнищата на значимост на t-теста) показва, че при кубичния модел параметрите b_2 и b_3 не са статистически значими. Всички параметри на квадратичния модел са статистически значими (таблица 2), което позволява моделът да се приложи за трендекстраполагационни прогнози.

Конкретният вид на квадратичния модел, въз основа на който се намират компонентите на тренда е:

$$\hat{Y}_i = 12169,890 + 707,991.t_i - 9,990.t_i^2$$

Таблица 2

Оценка на параметрите на квадратичния модел

Parameter Estimates	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
Case Sequence (b ₁)	707,991	46,587	1,463	15,197	0,000
Case Sequence ** 2 (b ₂)	-9,990	1,967	-,489	-5,079	0,000
Constant (b ₀)	12169,890	232,593		52,323	0,000

Избраният трендови модел за моделиране на тенденцията на развитие на ПТ може да се определи като добър. При него 99% от измененията в ПТ се обяснява с изменението на времето. Ако се направи допускане, че през следващите няколко години ПТ ще прояви подобни закономерности на развитие както през изследвания период, то стойностите ѝ ще се намират в интервалите, представени в таблица 3:

Таблица 3

Песимистичен, усреднен и оптимистичен вариант на прогнозните стойности на ПТ, измерена чрез БДС на едно заето лице по цени от 2015 г.

Години	Песимистичен вариант	Усреднен вариант	Оптимистичен вариант
2022	22469,37	23168,97	23868,57
2023	22661,81	23407,43	24153,05
2024	22824,01	23625,92	24427,83

През изследвания период 2000-2021 г. развитието на ПТ, измерена чрез БДС на един отработен човекочас проявява подобна тенденция на увеличение като при вече анализирания показател БДС на едно заето лице. За моделиране на съществуващата тенденция на развитие отново са конструирани девет трендови модела. Прави впечатление, че и при този показател, моделите, които имат най-висока обяснителна способност отново са квадратичният и кубичният, при които коефициентът на детерминация има стойност 0,989. Може да се направи заключение, че 98,9% от измененията в ПТ се обяснява с изменението на независимата променлива - времето. Проверката на статистически хипотези за адекватност на трендовите модели показва, че и двата модела са адекватни. При равнище на значимост $\alpha=0,05$, F-тестът показва, че се отхвърля нулевата хипотеза и алтернативната хипотеза се приема за правдоподобна. За квадратичния модел $F_{\text{емп.}}(863,797) > F_{\text{теор.}}(3,522)$, а за кубичния $F_{\text{емп.}}(545,606) > F_{\text{теор.}}(3,160)$. Проверката на статистически хипотези за значимост на параметрите на квадратичния модел посредством t-критерий на Стьудент показва, че всички параметри са статистически значими. Параметрите b₂ и b₃ на кубичния модел не са статистически значими. За моделиране тенденцията на развитие и построяване на трендекстраполационни прогнози на ПТ, измерена чрез БДС на един отработен човекочас, се избира квадратичният модел:

$$\hat{Y}_i = 7,433 + 0,404.t_i - 0,004.t_i^2$$

Чрез екстраполация (продължаване) на изследвания динамичен ред за ПТ през следващите три години, на базата на проявяващата се тенденция на развитие в миналото, се намират бъдещите стойности. С помощта на стохастичната грешка се определят интервалите на разработената трендова прогноза:

$$\hat{Y}_{n+L} - S_{\hat{Y}_{n+L}} \cdot t_{(\alpha, \nu)} \leq \hat{Y}_{n+L} \leq \hat{Y}_{n+L} + S_{\hat{Y}_{n+L}} \cdot t_{(\alpha, \nu)} \quad (2)$$

Границите, които се приемат като песимистичен и оптимистичен вариант на прогнозните стойности са представени в таблица 4.

Таблица 4

Песимистичен, усреднен и оптимистичен вариант на прогнозните стойности на ПТ, измерена чрез БДС на един отработен човекочас по цени от 2015 г.

Години	Песимистичен вариант	Усреднен вариант	Оптимистичен вариант
2022	14,15	14,61	15,07
2023	14,34	14,83	15,32
2024	14,51	15,03	15,55

Ако тенденцията на развитие на производителността на труда се запази, то през следващите три години добавената стойност на един отработен човекочас ще достигне приблизително стойностите: 14,61 лв., 14,83 лв., 15,03 лв.

Заклучение

Повишаването на производителността е ключов фактор за дългосрочния икономически растеж и повишаване на жизнения стандарт. В краткосрочен и средносрочен план производителността засяга и развитието на бизнес цикъла, инфлацията, обменните курсове и други ключови макроикономически променливи, като например потреблението, инвестициите и заетостта.

Въз основа на направения анализ на предимствата и недостатъците на показателите за измерване на производителността на труда, се стига до извода, че най-точни са показателите БДС на едно заето лице и БДС на един отработен човекочас. Показателите за характеризиране на общото развитие на ПТ в реално изражение, измерена чрез двата показателя, показват, че се наблюдава нарастване през целия изследван период спрямо базисната 2000г. Най-съществено е увеличението в края на периода с 79,22% добавена стойност на един зает и с 81,55% добавена стойност на един отработен човекочас. Верижните индекси потвърждават направената констатация, като изключение се наблюдава през 2013г. и 2020г., когато прирастът има отрицателни стойности. Това се обяснява с глобалната финансова криза, ефектът от която в България настъпва по-късно и ограниченията, които са свързани с пандемията от COVID-19. Средногодишно БДС на едно заето лице и БДС на един отработен човекочас се увеличават приблизително с 3%. В реално изражение БДС на едно заето лице нараства средногодишно с 486,39 лв., а БДС на един отработен човекочас с 0,31 лв. Приложен е методът на конкуриращите се модели за избор на най-подходящ трендови модел. Направените прогнози за следващите три години отчитат наблюдаваната тенденция към увеличение.

Растежът на производителността е свързан както с дългосрочни, така и с краткосрочни промени. Първите обикновено са свързани с тенденциите, които отразяват текущите структурни промени, докато последните са свързани с динамиката на бизнес цикъла. При анализирането на промените в производителността на труда трябва да се вземат предвид както дългосрочните промени, така и краткосрочната динамика, за да се оцени степента, в която промените в растежа на производителността могат да бъдат устойчиви.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Ben S. Bernanke, 2005. "[Productivity](#)," [Speech](#) 70, Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.)
2. Goev, V. i dr. (2019). Statisticheski analiz v sotsiologicheski, ikonomicheski i biznes izsledvania. Sofia: Izd. kompleks UNSS
3. Lambova, M. i dr. (2012). Vavedenie v statistikata. Varna: Izd. STENO
4. Manov, A. (2001). Statistika sas SPSS. Sofia: Izd. Trakia-M
5. National Statistical Institute. Methodology. Available at: https://www.nsi.bg/sites/default/files/files/metadata/GDP_2.1.3_Methodology.pdf (Accessed: 10 September 2022)
6. National Statistical Institute. GDP - Labour productivity - Total of economy Available at: https://infostat.nsi.bg/infostat/pages/reports/result.jsf?x_2=185 (Accessed: 10 September 2022)
7. Rusev, Ch. (1999) Statisticheski metodi za analiz na vremenni redove. Varna: Izd. Nauka i ikonomika

STRUCTURAL CONVERGENCE AND ECONOMIC DEVELOPMENT - THEORETICAL OVERVIEW

Chief Assist. Prof. Silvia Gospodinova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *The report provides a theoretical review of the literature on the structural convergence of countries within one and same economic area, focusing on the structural convergence of countries within the EU and its evolution. The aim is to bring out the fundamental, as well as the most recent research, focused on the importance of structural convergence, as well as the continuation and development of this process from a contemporary point of view.*

Keywords: *Structural convergence; Similarity; European integration; Integration area*

JEL code: *F02, F15, 047*

СТРУКТУРНА КОНВЕРГЕНЦИЯ И ИКОНОМИЧЕСКО РАЗВИТИЕ – ТЕОРЕТИЧЕН ПРЕГЛЕД

Гл. ас. д-р Силвия Господинова
Икономически университет - Варна, България

Въведение

Изведеният проблем е актуален, тъй като структурната конвергенция има редица средносрочни и дългосрочни последици свързани със синхронизирането на бизнес циклите, изграждането на дългосрочни модели на развитие, както и с проблемите на специализацията и концентрацията. Въпросът е от голям интерес в контекста и на бъдещото развитие на ЕС, както и при вземането на решение за приемането на еврото от страна на България.

В много изследвания динамиките в икономическите структури и различията в тях между отделните държави-членки на ЕС са отправна точка за анализ на теориите за икономическото развитие. Именно поради тези причини всички нови аспекти от теоретична гледна точка следва да се разгледат и подходящите от тях да се приложат за да се подпомогне структурната конвергенция на България към тази на ЕС.

Анализирането на процесите на конвергенция не датира отскоро, но първоначалните изследвания са насочени най-вече към номиналната конвергенция. Впоследствие изследвания се насочват към реалната конвергенция, а в още по-съвременните условия и към структурната конвергенция.

Емпирични изследвания проведени основно в периода 1990-2007 година по отношение на страните-членки на ЕС за реалната конвергенция, показват, че страните се сближават в няколко ключови аспекта – производителност (Knill, 2007); показатели, характеризиращи пазара на труда, както и доходи на глава от населението (Marelli, E., Signorelli, M. & Tyrowicz, J. 2012). По отношение обаче на конвергенцията на икономическите структури (Scharpf, 2016) нещата не са толкова ясни и лесни за проследяване.

Структурната конвергенция се дефинира по няколко начина, според различни показатели. Основно се използват конвергенция в секторните структури на БВП и брутната добавена стойност, на заетите лица или отработените човекочасове, а също и конвергенция на производителността, в частност на дохода на глава от населението (Wacziarg, 2004).

Важността на процеса на изучаване на структурната конвергенция се крие в дългосрочните последици от нея свързани със синхронизирането на бизнес-циклите и относно динамиката на специализацията и модела на икономическо развитие.

Структурната конвергенция има ключова роля в рамките на единния европейски валутен съюз и непостигането ѝ крие риск от икономическа и финансова дивергенция. Тази структурна конвергенция може да бъде постигната, ако следните процеси станат реалност, а именно:

- Висока степен на конвергенция в структурите на икономиките;
- Синхронизиране на бизнес циклите;
- Външнотърговска интеграция.

Високата степен на конвергенция в структурите на икономиките може да смекчи евентуални шокове, причинени от липсата на синхронизация на бизнес цикъла. В литературата емпирично е доказано положителното въздействие на структурната конвергенция при синхронизирането на бизнес цикъла (Beck, 2014).

Целта на този доклад е да се направи преглед както на теоретичната, така и на емпиричната литература относно значението на структурната конвергенция за страните от една и съща икономическа зона с акцент върху проблема за структурната конвергенция и последиците, които тя носи за синхронизирането на бизнес циклите, специализацията и икономическото развитие на страните от ЕС.

Дефиниране на структурната конвергенция и свързаните с нея понятия

Структурната конвергенция дава информация за степента, в която страните разполагат с потенциал за формиране на оптимална валутна зона, както и за равнището на интеграция в рамките на единния европейски пазар и сходствата или различията в специализацията между тях. Концепцията за структурната конвергенция засяга най-вече процесите, водещи до сходство в икономическите структури и конвергенция на доходите на глава от населението, все важни процеси за държави, принадлежащи към една и съща икономическа общност. Икономическото уеднаквяване на страните от еврозоната, макар и нерегулирано, е една от основните предпоставки за доброто функциониране на съюза.

Терминът „икономическа структура“ е доста общ и съчетава в себе си голямо разнообразие от редица важни характеристики за всяка икономика. В повечето изследвания става въпрос и се изследва структурата на производството, на потреблението, на заетостта, на търговията, на държавните разходи и т.н (Branson, W. H., Guerrero, I., & Gunter, B. G. 1998). Още през 1956 година Кузнец (Kuznets, 1956) характеризира икономическата структура по показателите: дял на БВП по сектори и редица променливи, свързани с търговията.

Концепцията за структурните изменения се използва за установяване и разбиране на причинно-следствената връзка между икономическото развитие и

промените в размера и състава на икономическите сектори. Различните автори избират набор от променливи, посредством които анализират връзката между конвергенцията на дадени икономики и икономическото развитие, способността за преодоляване на икономически шокове и за формиране на единна валутна зона.

Емпиричните изследвания в тази област също са разнообразни и затова ще бъдат разгледани в следващия параграф.

Емпирични изследвания, свързани със структурната конвергенция

Изследванията по въпроса за икономическата конвергенция на страните се фокусират на различни равнища (Gugler, K. & M. Pfaffermayr 2004): структурна конвергенция (Fagerberg, 2000) на индустриално ниво (Höhenberger & Schmiedeberg, 2008); роля на селското стопанство (Sassi, M. 2007) в процеса на структурна конвергенция (Fertő, 2016); преход от селскостопанска икономика към индустриална и след това към сектора на услугите (Chong, C. Y., Habibullah, M. S., Baharumshah, A. Z., & Midi, H. 2017); регионална (Berardino, Di, C., Mauro, G., Quaglione, D., & Sarra, A. 2017) конвергенция (Guerrieri, G. & S. Iammarino, 2003); структурна конвергенция и връзката ѝ с доходите; конвергенцията и нейната връзка с интеграцията към паричния съюз (Brülhart, 1998); конвергенция в производителността (Imbs, J. Wacziarg R., 2003) на труда (Cuadrado-Roura, J. R., García-Greciano, B., & Raymond, J. L. 1999) и т.н.

Други автори анализират процеса на догонване между индустриално развити икономики, новоиндустриализирани и по-слабо индустриализирани такива (Abegaz, 2002) или на страни от Централна и Източна Европа (Landesmann, 2000), а също и на новоприсъединили се страни към ЕС (Brixiova, Z., M. Morgan & A. Wörgötter, 2009), както и правят преоценка на конвергенцията за страните (Palan & Schmiedeberg, 2010), които вече са членки и следва да приемат еврото (Juncker, J. C., Tusk, D., Dijsselbloem, J., Draghi, M., & Schulz, M. 2015).

Структурна конвергенция и икономическо развитие – фактори и последици

Структурната конвергенция е стремеж на по-слабо развитите икономики да се доближат до по-развитите. Развитите икономики имат интерес да си сътрудничат със страни, които структурно се доближават до тях, защото това означава аналогична покупателна способност, сходни и по-големи пазари, трансгранично движение на ресурси, подобно инвестиционно поведение, сходно технологично и образователно равнище.

Ако се постигне структурна конвергенция, всички сближаващи се икономики в крайна сметка ще могат да си сътрудничат повече, да координират своите политики и да преговарят заедно по отношение на трети страни.

Структурната конвергенция може да се изследва на секторно или отраслово равнище. За първи път нещо такова на база хипотезата за трите сектора прави Фурастие (1949г.).

Скоростта на структурна конвергенция зависи от три основни фактора:

- 1) Първоначалното отклонение от структурата на развитие на модела, който се следва;
- 2) Темпа на растеж на БВП;

3) Следваната търговска политика.

Хипотезата за трите сектора предвижда, че страните със сходни нива на развитие се характеризират и със сходна междусекторна структура. Разбира се нивото на структурна конвергенция не бива да се абсолютизира поради разлика в размера, ресурсната обезпеченост, културните и институционалните характеристики на икономиките (Chenery, 1960).

Преминаването на една икономика от по-слабо развита към по-силно развита може да се илюстрира чрез множество структурни промени, които е възможно да варират в зависимост от даденостите и социалните ѝ характеристики. Изведени са редица фактори, които спомагат за структурната конвергенция между страните, това са: сходни промени в потребителското търсене; увеличаване равнището на доходите; необходимост от натрупване на физически и човешки капитал; по-лесен достъп до нови технологии и свободна търговия (Chenery, 1982).

Структурното сходство е ключов елемент от процеса на структурна конвергенция, която е от особено значение и за икономическия растеж. Тя е важна и от гледна точка на това, че ако бизнес циклите на страните не са синхронизирани и има асиметрични сътресения или различия в механизмите на предаване на общите сътресения между тях, то структурната конвергенция може да изглади това въздействие на синхронизираните вече икономики.

Например, страните сближаващи се по отношение на доходите на глава от населението имат тенденция да се сближават и по отношение на отрасловата си структура, а също и по отношение на секторната си производителност на труда (Wacziarg, 2004).

Изравняване на факторите на сравнителните предимства в модела на Хекшир-Олин също може да доведе до структурна конвергенция между страните и регионите.

В изследване на 14 европейски държави (Barrios, S., Barry, F. & Strobl, E., 2002) е доказано значението на конвергенцията в доходите на глава от населението и по отношение на икономическата структура. Изводите от това изследване са потвърдени и в друго проучване (Wacziarg, 2004).

Доказано влияние върху структурната конвергенция имат и фактори като географската близост и наличието на общи граници, както и размера на населението (Crespo & Fontoura, 2010).

Структурна конвергенция в Европейския съюз

Поради наличието на общи институции, политики, регулации и до известна степен ресурси, Европейският съюз предоставя подходяща рамка за емпиричен анализ на модела на растеж и структурна промяна. Чрез подходящ анализ може да се установи дали определени държави изостават и съответно какво е тяхното разпределение и натрупване на ресурси и демографското им развитие.

Емпиричните резултати потвърждават различията в развитието на страните, които по-късно са се присъединили към ЕС (Prados de la Escosura, 2007), а по-тесните търговски връзки могат да ускорят структурната конвергенция в страните с единна парична зона (Frankel & Rose, 1997). От друга страна високата търговска интензивност може да доведе до повишаване на специализацията и

оттам до по-ниски равнища на структурна конвергенция (Krugman, 1993). Очакванията са приемането на единната валута от всички страни-членки да даде допълнителен стимул за извършване на структурни реформи, които да компенсират загубите от паричната политика и да послужат като инструмент за стабилизиране (Buti & Turrini, 2015).

Доказано е, че нивото на конвергенция се различава в зависимост от икономическото развитие на страните. Двигател на структурната конвергенция са междусекторните структурни изменения, тъй като съотношението на трите основни сектора става все по-еднакво във времето поради процесите на индустриализация и развитието на третичния сектор (Höhenberger & Schmiedeberg, 2008).

При изследване на междуетрасловото равнище на конвергенцията може да се получат доста разнопосочни резултати, тъй като отраслите, формиращи даден сектор като цяло могат да се развиват в различни посоки. При едни от тях може да има икономии от мащаба, докато при други да са високи производствените и трудовите разходи. И съответно тези разнопосочни тенденции в тяхното развитие се неутрализират взаимно, когато анализът е на секторно равнище.

Заключение

Структурната конвергенция е сложно понятие и явление. В резултат на това дефинициите за нея не са напълно строги и точни, а обхващат широк спектър от условия, които се наблюдават и следва да бъдат постигнати от структурно сближаващите се икономики. Този списък от условия може постоянно да се допълва на база на установените тенденции в развитието и сближаването на икономиките. Структурна конвергенция в абсолютна форма не е постигната, но се смята, че тя има положителна връзка с икономическия растеж все по-често се изследва нейната степен, тъй като се смята, че страни, които съумеят да увеличат сближаването на своята икономическа структура към тази на ЕС, могат да се надяват на консолидиране на стратегическата си позиция, ще имат повече възможности за бъдещо развитие, а също и за избягване на асиметрични сътресения в него. Всичко това води до формирането на следните тенденции в научните изследвания по въпроса:

1) Макар и нова, концепцията за структурната конвергенция е сравнително добре аргументирана от теоретична гледна точка, с множество изследвания в тази посока, а също и с немалко емпирични изследвания на проблема. На база на тях се изграждат и множество политики, а също и се отчита напредъка в тази посока с редица примери за отделните икономики.

2) Емпиричната литература по въпроса се фокусира повече върху номиналната или реалната конвергенция, тъй като условията за нея са точни и е по-лесна за измерване. Освен това в случая на Европейския съюз се налагат само номинални критерии за конвергенция. Въпреки това, много автори се обединяват около идеята, че за присъединяването към Европейския валутен съюз особено важни са структурната и реалната, а не само номиналната конвергенция.

3) В научната литература доста често се препоръчва икономическите структури и различията между тях да са отправна точка за анализ и развитие на теориите за икономическото развитие. Основната причина за това е, че страните,

които са в различни етапи от своето развитие в повечето случаи имат различия в икономическите структури поради ресурсната обезпеченост.

След като обобщихме значението и последиците от структурната конвергенция, се вижда важноста на този проблем за бъдещето на страните-членки на ЕС. Интегрирането на страните в ЕС спомага за структурната конвергенция до известна степен, но също така интеграцията не може да се задълбочи, ако конвергенцията също не напредне.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Abegaz, B. (2002). Structural Convergence in Manufacturing Industries between Leaders and Latecomers, *Journal of Development Studies*, 38(4), 69-99.
2. Barrios, S., Barry, F. & Strobl, E. (2002). FDI and Structural Convergence in the EU Periphery. Mimeo, University College Dublin, p. 150-162.
3. Beck, K. (2014). Structural Similarity as a Determinant of Business Cycle Synchronization in the European Union: A Robust Analysis. *Research in Economics and Business: Central and Eastern Europe*, 5(2), 31-54.
4. Berardino, Di, C., Mauro, G., Quaglione, D., & Sarra, A. (2017). Structural change and the sustainability of regional convergence: Evidence from the Italian regions. *Environment and Planning C: Politics and Space*, 35(2), 289-311.
5. Branson, W. H., Guerrero, I., & Gunter, B. G. (1998). Patterns of Development.
6. Brixiova, Z., M. Morgan & A. Wörgötter (2009). Estonia and Euro Adoption: Small Country Challenges of Joining EMU, OECD Economics Department Working Papers, No. 728, OECD. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1787/220860037027>.
7. Brülhart, M. (1998). Economic geography, industry location and trade: the evidence. *The World Economy*, 21(6), p. 775-801.
8. Buti, M. & Turrini, A. (2015). Three waves of convergence. Can Eurozone countries start growing together again?, VOX, CEPR's Policy Portal. Retrieved from: <http://voxeu.org>, 17 April 2015.
9. Chenery, H.B. (1960). Patterns of Industrial Growth, *American Economic Review*, 50(4), 624-654.
10. Chenery, H. (1982). Industrialization and Growth, the Experience of Large Countries, World Bank Staff Working Papers, Number 539.
11. Chong, C. Y., Habibullah, M. S., Baharumshah, A. Z., & Midi, H. (2017). Structural Convergence Among ASEAN Economies. *Advanced Science Letters*, 23(9), p. 8747-8751.
12. Crespo, N., & Fontoura, M. P. (2010). Determinant factors of structural similarity at the regional level: evidence from Portugal. *Applied Econometrics and International Development*, 10 (1), 81-93.
13. Cuadrado-Roura, J. R., García-Greciano, B., & Raymond, J. L. (1999). Regional convergence in productivity and productive structure: The Spanish case. *International Regional Science Review*, 22(1), 35-53.
14. Fagerberg, J. (2000). Technological progress, structural change and productivity growth: a comparative study. *Structural Change and Economic Dynamics*, 11, p. 393-411.

15. Fertő, I. (2016). Structural transformation in Central and Eastern European countries' agriculture: Convergence or Divergence?. *ADVANCES IN ECONOMICS AND BUSINESS*, 4(10), p. 547-552.
16. Frankel, J. A. & Rose, A. K. (1997). Economic Structure and the Decision to Adopt a Common Currency. Stockholm University, Institute for International Economic Studies, Seminar Papers 611.
17. Guerrieri, G. & S. Iammarino (2003). The Dynamics of Export Specialisation in the Regions of the Italian Mezzogiorno: Persistence and Change. SPRU Electronic Working Papers No. 105.
18. Gugler, K. & M. Pfaffermayr (2004). Convergence in Structure and Productivity in European Manufacturing?. *German Economic Review*, 5, p. 61-79.
19. Höhenberger N. & Schmiedeberg, C. (2008). Structural Convergence of European Countries, center for European. Governance and economic development research, discussion papers. No. 75, July. CeGE Discussion Paper, Retrieved from: <https://www.econstor.eu/handle/10419/32002>
20. Imbs, J. Wacziarg R. (2003). Stages of Diversification, *American Economic Review*, 93 3(1), p. 63-86.
21. Juncker, J. C., Tusk, D., Dijsselbloem, J., Draghi, M.. & Schulz, M. (2015). Completing Europe's economic and monetary union. Retrieved from: https://ec.europa.eu/commission/sites/beta-political/files/5-presidentsreport_en.pdf
22. Knill, C. (2005). Introduction: Cross-national policy convergence: concepts, approaches and explanatory factors. *Journal of European public policy*, 12(5), p. 764-774.
23. Krugman, P. (1993). Lessons of Massachusetts for EMU. In Torres, F., Giavazzi, F. (Eds.). *Adjustment and Growth in the European Monetary Union* (pp. 241–261). Cambridge University Press.
24. Kuznets, S. (1956). Quantitative Aspects of the Economic Growth of Nations: I. Levels and Variability of Rates of Growth. *Economic Development and Cultural Change*. 5 (1), p. 5–94.
25. Landesmann, M. (2000). Structural change in the Transition Economies 1989-1999, *Economic Survey of Europe*, 2.
26. Marelli, E., Signorelli, M. & Tyrowicz, J. (2012). Crises and Joint Employment-Productivity Dynamics: A Comparative Perspective for European Countries., *Comparative Economic Studies*, 54(2), p. 361-394.
27. Palan, N., & Schmiedeberg, C. (2010). Structural convergence of European countries. *Structural Change and Economic Dynamics*, 21(2), p. 85-100.
28. Prados de la Escosura, L. P. (2007). European patterns of development in historical perspective. *Scandinavian Economic History Review*, 55(3), p. 187-221.
29. Sassi, M. (2007, April). Structural change and economic convergence across the Eu-15 regions: can the agricultural sector play a role. In *Agricultural Economics Society's 81st Annual Conference*, University of Reading, UK, 2nd to 4th.
30. Scharpf, F. W. (2016). Forced Structural Convergence in the Eurozone—Or a Differentiated European Monetary Community.
31. Wacziarg, R. (2004). Structural convergence. Manuscript, Stanford University, CDDRL Working Paper No 8. Retrieved from <http://cddrl.fsi.stanford.edu/>.

IMPROVING DEVELOPER SKILLS BY USING THE APPROPRIATE DESIGN PATTERNS

Chief Assist. Prof. Mariya Armyanova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *The continuous technology change and software requirements forces developers to look for opportunities to quickly learn new technologies and familiar learn themselves with the features of the new software products. A possible solution are design patterns. Therefore, they are widely applied in software development to various fields and technologies. Finding the right pattern for given situation is difficult and important. Applying inappropriate patterns or not taking into account their limitations and shortcomings can introduce new problems and bugs into the software. Therefore, it is important to find a balance in their use.*

Keywords: *Design Patterns; GoF; Anti-Patterns*

JEL code: *C88*

ПОДОБРЯВАНЕ НА УМЕНИЯТА НА РАЗРАБОТЧИЦИТЕ ЧРЕЗ ИЗПОЛЗВАНЕ НА ПОДХОДЯЩИТЕ ШАБЛОНИ ЗА ПРОЕКТИРАНЕ

Гл. ас. д-р Мария Армянова
Икономически университет – Варна, България

В съвременния конкурентен и динамичен свят бизнесът изисква качествени софтуерни системи, които отразяват текущите му нужди и лесно се адаптират към изискванията на световния пазар. Разработването, поддържането и развитието на софтуерните системи е трудоемък процес, изискващ значителни умения и практически опит. При новите области в информационните технологии, като мобилните приложения има допълнителни предизвикателства (Petrov et.al., 2021). Непрекъснатото развитие на информационните технологии, също затруднява разработката, поради необходимостта разработчиците да ги познават и прилагат. Процесът допълнително се усложнява, ако системата трябва да позволява бъдещи промени или елементите ѝ да се използват многократно. Трудността за разработчиците много често е следствие от непознаването на предметната област и неразбирането на изискванията на възложителите. Всяка област има специфични проблеми, например дигитализацията на строителния сектор, изисква съобразяване със законодателството (Parusheva et.al., 2021), а в банковия сектор се спазва GDPR регламент (Vasilev et.al., 2021). Проблем е и откриването на компоненти, на които да се декомпозира системата, и на най-подходящите технологии за реализацията и взаимодействието им. Проектът на системата трябва да е специфичен и да описва характеристиките на решавания проблем и същевременно трябва да е достатъчно обобщаващ, за да може да се свърже с бъдещи проблеми и изисквания. Едно от основните изисквания към софтуера е да

се разработи така, че да позволява лесна и евтина бъдеща преработка, но и същевременно да минимизира необходимостта от промени.

За начинаещите разработчици е трудно да се ориентират сред многото възможности за решение. Експертите, от своя страна, не започват всеки път от откриването на индивидуално решение за съответната предметна област, а използват предишни разработки за подобни проблеми. Веднъж намерили полезно решение, разработчиците многократно използват негови варианти в различни системи. Възможна насока за преодоляване на тези трудности е базирането на предишни разработки. Поради тази причина в много системи се откриват повтарящи се решения на подобни проблеми, които могат да се оформят като шаблони. Те решават специфични проблеми на разработката и осигуряват по-голяма гъвкавост на софтуера и многократното му използване. Целта е веднъж намерено, доказалото се като успешно, решение да послужи за основа на нова разработка.

От гледна точка на разработката на софтуер (Sourcemaking, 2022) под шаблон се разбира документ, описващ общо решение за даден проектен проблем, което може да се прилага неведнъж в много проекти. Разработчиците адаптират решението от шаблона според спецификите на конкретния проект. Шаблонът е документирано, абстрактно решение на повтарящ се проектен проблем, свързан с разработването на софтуер, в определен контекст, доказало своята полезност в практиката. То е насока, която може да е под различна форма, както твърдят Чембърс и Харисън (Chambers, 2000, с. 277-289).

Шаблоните за проектиране възникват, като група от добри практики за често срещани проблеми при проектиране, с които се сблъскват софтуерните инженери, които са използвали обектно-ориентираната технология в разработката на софтуер. Основната употреба на шаблоните за проектиране е да облекчат сложността на създаването и интегрирането на обекти. Идеята при възникването им е, че след като начинаещият специалист овладее тези ключови особености и може да ги прилага в софтуерни проекти, той ще навлезе в обектно-ориентираната технология. Тази идея на шаблоните се пренася и за всички съвременни технологии. Новите групи шаблони възникват, за да позволят на начинаещите специалисти да приложат опита на експертите в области като облачните технологии, IoT (Internet of Thing) или изкуствения интелект.

Шаблоните за проектиране първо са събрани в една книга от група от четири автори, които са добре известни като Gang of Four (GOF). През 1994 г. те са написали книгата „Design Patterns — Elements of Reusable Object-Oriented Software“, която се счита за точка на еволюция на 23-те шаблона за проектиране (Gamma et.al., 1994). Съгласно GOF шаблоните за проектиране се дефинират според принципите на обектно-ориентираното програмиране.

Шаблоните за проектиране подобряват уменията на разработчиците, защото когато те се изправят пред проблем по време на разработката, могат да потърсят подходящ шаблон за проектиране. Шаблоните предоставят добра алтернатива, тъй като те са безрискови, добре проучени и доказали се като надежден начин за решаване на такъв проблем. Освен това целта на всеки шаблон е да предложи проектно решение, което да позволи лесно развитие на системата. Те са добре описани и известни, така че включването им в проекта, добавя яснота

и в документацията. Затова използването им подобрява и поддържа използваемостта и читаемостта на решението.

Шаблоните за проектиране не се ограничават до решаване на конкретен програмен проблем или опростяване на дадено софтуерно решение, а те са създадени на етап проектиране и влияят на приложението като цяло. Голяма част от шаблоните влияят върху структурата на приложението или цялостната архитектура.

Шаблоните за проектиране се базират на основните принципи на технологиите. Затова внасят редица предимства във всеки софтуерен проект. Те правят проекта по-гъвкав, кода по-кратък и не се нуждаят от пълно документиране, достатъчно е в проекта да се впише, че се използват.

Таблица 1

Предимства от използването на шаблоните

Решаване на методологични проблеми при изграждане на софтуерни системи	Поддържане на технологии, техники и подходи на разработка	Типизация и повторно използване
<u>- подобряват дейностите на етапите от жизнения цикъл на системата</u> - улесняват, ускоряват и подобряват разработката - повишават продуктивността - улесняват декомпозицията - подобряват проектирането - документацията се разработва по-лесно и по-бързо - увеличават гъвкавостта на системите - улесняват съпровождането на системите - притежават възможностите на средство за разработка <u>- подобряват качествата на продукта</u> <u>- спомага за подобряване на екипа</u> - общо известна терминология - подобрява общуването - подобряват знанията и уменията на начинаещите разработчици - представянето на нови технологии, доказва полезността им на разработчиците	<u>- обектно-ориентирания подход</u> - поддържат обектно-ориентираните концепции – декомпозиция, наследяване, полиморфизъм - откриването на подходящи обекти - прецизно определяне на обектите - определяне на интерфейса на обектите - изпълнението на обектите <u>- сигурността</u> <u>- бази от данни</u> <u>- многонишковата обработка</u> - синхронизират и координират различни процеси - модели на многонишкова архитектура <u>- облачни технологии</u> - модели на архитектура на облачно приложение - прилагане на специфичните възможности на облачните доставчици <u>- изкуствения интелект</u>	- прилагане на натрупания до момента опит - абстракцията на вече разработените приложения - улесняват повторната употреба на полезните проекти и архитектури - гъвкаво повторно използване - лесното идентифициране на неясните абстракции - механизъм за повторна употреба - използват се в библиотеки

В различни литературни източници са посочени различни предимства на шаблоните. Например според Фаулър (Fowler et. al., 2002) едни от най-трудните аспекти на процеса са „разбирането и промяната на съществуващия код, без въвеждане на нови дефекти или нежелани последствия“. Описанието на шаблоните съдържа възможните последици от прилагането им при промяна в контекста. Затова използването им позволява системите да се създадат така, че да се улесни бъдещото им развитие. От Бруслер (Brössler, 2000) е проведен експеримент, който доказва, че шаблоните улесняват и намаляват времето за

извършването на девет типа задачи по поддръжката на софтуера в сравнение с други опростени варианти. Откритите при проучването на литературните източници предимства са обобщени в таблица 1. При това те са систематизирани в три категории. Първо шаблоните решават методологични проблеми на изграждането на информационни системи. Втората категория предимства на шаблоните са свързани с поддържане на технологиите и подходите за разработка – например обектноориентирания подход, облачната технология или IoT. Третата категория предимства на шаблоните е типизацията и повторното използване на полезни решения. Шаблоните позволяват да се приложи опита и знанията на разработчици, заложили в тях. Те могат да се използват, като механизъм за повторна употреба на доказано полезните решения.

От изброените предимства на шаблоните може да се направи изводът, че те улесняват повторната употреба на полезните проекти и архитектури. Представянето на доказали се техники с шаблони ги прави достъпни за разработчиците на нови системи. Те дават възможност на разработчика да избира между няколко възможности. Подобряват документацията и улесняват поддръжката на съществуващите системи. Позволяват по-бързото откриване на подходящите за софтуера функционални възможности и начините за реализацията им.

Като всяко средство, целящо подобряването на разработката на софтуерни системи, и прилагането на шаблоните освен предимства има и недостатъци. Шаблоните за проектиране не са универсално решение за всеки проблем. Те не могат да се прилагат навсякъде и възможно най-много. Подобен начин на работа е характерен за начинаещите разработчици, но вместо ползи той въвежда редица недостатъци в проекта.

При документирането на шаблоните са описани, както принципа им, областта на приложението им и предимствата им, така и взаимодействието им с други шаблони, а също и правилния контекст за използването им.

Отговорността за избора на подходящ шаблон е на проектанта или програмиста, който се е сблъскал с конкретен проблем на разработването на софтуер. Шаблоните се срещат в много различни варианти и е необходимо да се избере нужния за всеки конкретен проблем, според контекста. Например ако за подходящ се избере шаблонът Наблюдател (Gamma et.al., 1994), трябва внимателно да се анализира контекстът на проблема, за да се открие оптималният вариант на шаблона за него. В един от вариантите наблюдаваният обект пази референции към наблюдателите си, а в друг създава асоциативен списък за съхранение на връзките си с тях.

Въпреки значителни предимства на шаблоните за проектиране, има и отрицателни странични ефекти, когато не се използват правилно. Например използването на шаблони за проектиране може да доведе до възникване на проблеми с проекта. Добрият софтуерен проект има „висока кохезия и ниско свързване“. Възниква въпросът за автономността на класовете в проект, използващ шаблони за проектиране. Мохамед (Mohammed et.al, 2016) провежда емпирично проучване, за да установи дали използването на шаблони за проектиране увеличава независимостта на класовете. Експериментът му е направен чрез анализиране на 5 Java проекта с отворен код и сравнение с

използването на 17 шаблона за проектиране. Оказва се, че класовете, използващи шаблони за проектиране, са по-силно свързани в сравнение с класовете, които не използват шаблоните за проектиране. Но това само по себе си не означава, че решенията с използването на шаблони за проектиране не постигат други цели в проектите.

Основният проблем на шаблоните за проектиране обаче е неправилното им използване. Разработчиците имат склонност да изучават и разбират шаблоните на проектиране, без да разпознават и научават условията за успешното им прилагане. Ако се приложи шаблон като решение в контекст, което не отговаря на използването му, тогава се създава още един проблем, вместо да се решава първоначалния. Освен това, когато шаблоните са неправилно приложени, те ще повлияят негативно на преносимостта, разширяемостта и гъвкавостта на проекта.

Друг недостатък е свързан с абстрактността на шаблона. Многократното използване на дадено софтуерно решение се постига с обобщаването и капсулирането му, което води до намаляване на ефективността на решението в частния случай и увеличаване на сложността му. Шаблоните представят общия случай, който обаче трябва да се сведе до нуждите на конкретната система. Тъй като те предлагат по-общ поглед върху модела, е възможно да не отразяват комплексната сложност на проблемите, характерни за разработвания проект. Използването на шаблона се затруднява, когато не е ясно дали моделът на елемента от разработваната система има съществени различия от този, предложен от шаблона.

Шаблоните за проектиране имат за цел да стандартизират най-добра практика за общ проблем. И все пак общите проблеми не са еднакви, затова използването на шаблона може да доведе до увеличаване на сложността на кода или дублиране на кода. Когато използването му се сравни с друго решение на проблема по абстрактен начин, който не е дефиниран от шаблона, може да се окаже, че използването на шаблона е по-малко ефективно. Но често алтернативното решение е по-ненадеждно, защото все още не е доказало своята ефективност и не са открити всички проблеми, свързани с използването му.

Основен проблем е и голямата прилика между шаблоните за проектиране. Освен това проблемът се задълбочава от липсата на единен и удобен каталог за класификация и описание на шаблоните. Този проблем е дефиниран още от Езерскис (Ezerskis & Simutis, 2005). Най-често срещаната форма за представяне на шаблон е текстово описание или html формат с препратки и примери (Refactoring guru, 2022). От друга страна считаме, че понякога създателите на шаблони не успяват да постигнат и двете противоречащи си техни ограничения – универсална употреба и лесно разбиране и прилагане. Освен това не съществуват автоматизирани инструменти за разработка, които да генерират цялостна система директно от шаблон, а могат да се генерират само отделни компоненти. Нужно е разработчиците сами да се погрижат за интегрирането и документирането на решението от шаблона, тъй като той не е готова система, а само абстрактен модел на елемент от нея.

Можем да направим извод, че шаблоните са доказано и правилно решение, но само ако се прилагат в подходящия контекст за проблема на проекта. В таблица

2 са систематизирани авторските разсъждения за предимствата и недостатъците на шаблоните и за начините за решаването им.

Съпоставяйки някои предимства и недостатъци на шаблоните от таблица 2, можем да направим извода, че всяко предимство на шаблоните може да се окаже и недостатък в определен контекст, но ако се подходи правилно, проблемите са разрешими и затова прилагането на шаблоните очакваме да подобри уменията на разработчиците.

Таблица 2

Предимства и проблеми при използването на шаблоните

Предимства	Проблеми	Решения
По-лесна разработка, като не се налага да се откриват общоизвестни конструкции и решения;	Обобщаването на решението намалява ефективността му в частния случай и увеличава сложността му;	Използване на шаблона в подходящия контекст;
Подобряват технологичните (обектно-ориентирани, облачните) умения на разработчиците;	Не са достатъчни, като инструмент за обучение на начинаещи специалисти;	Трябва първо да се познават методологиите и технологиите и тогава да се използват шаблоните;
Реализациите им се включват в библиотеки и езици;	Големият обхват на библиотеките води до трудното им опознаване, изучаване и използване;	Необходима е класификация на шаблоните, която да позволи лесното им откриване;
Подобряват общуването в екипа чрез разширяване на професионалния речник;	Няма създаден подходящ и удобен каталог за класификация и описание на шаблоните;	Познаване на шаблоните, отнасящи се до разработваното приложение;
Софтуерът става по-качествен и лесен за поддръжка и развитие, тъй като шаблонът е практически проверен и са отстранени откритите проблеми.	Увеличават работата на разработчиците, които се нуждаят от време за откриването им.	Проектът се разработва непредубедено, без предварителни нагласи и готови решения, за да се открият по-ефективните и качествените.

Обаче няма опростено правило или формула за откриване на подходящия шаблон за всеки отделен случай. Затова все още няма създадени автоматични системи, които да разработват проекти на софтуерните системи.

Разработчиците в процеса на работа придобиват повече опит и започват да откриват ситуации, в които шаблонът е полезен. Те установяват начина, по който да приложат шаблона, като конкретизират абстракцията, съдържаща се в шаблона, в код на подходящ език.

Шаблоните за проектиране сами по себе си не се провалят. Те са добро решение. Но проблемите обикновено идват от липсата на опит на разработчика, който има задачата да разработи проект, който включва не само един шаблон. При това разработчикът трябва да прецени възможностите и начина, по който подходящите шаблони за решаването на проблемите на проекта могат да си взаимодействат. Неправилното взаимодействие на шаблоните може да доведе до нови проблеми или грешки или кодът да стане ненужно сложен или неясен. Понякога проблемите и грешките идват и когато неопитният разработчик иска да използва всички шаблони за проектиране, които са подходящи за откритите в проекта проблеми.

По подобие на шаблоните за проектиране, които описват добрите практики, са дефинирани анти-шаблоните, които описват често срещаните проблемни практики. Анти-шаблоните са неадекватно решение на повтарящ се софтуерен проблем или са порочна практика. За да бъде класифицирана лошата практика, като анти-шаблон, тя трябва да бъде наблюдавана поне три пъти (Neill & Laplante, 2006). Следователно това е решение, което е преоткрито по грешен начин в отговор на повтарящия се проблем. Анти-шаблонът е често използвана структура, която генерира лоши последствия, дори ако първоначално е изглеждала ефективна.

За дефинирането на анти-шаблоните голям принос има Браун. Той дефинира „Анти-шаблонът като описание на често срещано решение на проблем, което генерира определено негативни последици“ (Brown et al., 1998). Анти-шаблоните могат да бъдат въведени в проекта от мениджъри или разработчици и са отрицателна практика в разработката или управлението на проекта. Анти-шаблоните могат да са резултат от липсата на достатъчно знания или опит за решаване на конкретен проблем, но може да се появят и като резултат от опит за прилагане на шаблон за проектиране, поради неразбирането му или прилагането му в грешен контекст (Brown et al., 1998).

Разработчиците трябва да познават и избягват да използват анти-шаблоните, за да подобрят уменията си. Програμισите често използват анти-шаблоните, защото са прости, бързи или дори изглеждат работещи, но често причиняват повече проблеми, отколкото решават. Те са много изкушаващи, защото са лесно и интуитивно решение, което решава веднага и без много усилия даден проблем. Но създава много други в проекта.

За анти-шаблоните също няма общ каталог, но редица автори са събрали каталози на често използваните шаблони. Има каталог на анти-шаблоните за Java (Bradbury and Jalbert, 2009), за C# (Kralj, 2022), а също за Микросървис архитектурата (Esas, 2021) или шаблоните, свързани с управлението на проекти (Aydinli, 2015). Има създаден сайт, който да събира анти-шаблоните (Brown et. al., 2022), а учени, като Jaafar разработват различни методи за откриване на порочни практики в различни софтуерни системи.

Шаблоните за проектиране не са непременно най-доброто решение, разработчиците трябва да открият ефективен начин да ги използват и съчетаят с останалите компоненти на проекта или да потърсят алтернативни решения и да ги сравняват с шаблоните за проектиране. Независимо от това, в редица случаи шаблоните внасят редица предимства в проекта. Затова владението на шаблоните за проектиране, познаването на различните видове и техните особености, може да подобри уменията на разработчиците. По същия начин познаването на порочните практики, описани от анти-шаблоните, позволява на разработчиците да ги избягват и да търсят по-ефективно и надеждно решение.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Aydinli, D. (2015). "Software project management anti-patterns in innovation projects", M.Sc. thesis, 68 pages, [Онлайн] Available at: <https://core.ac.uk/download/pdf/250138426.pdf> (09.09.22)
2. Bradbury, J., Jalbert, K. (2009). "Defining a Catalog of Programming Anti-Patterns for Concurrent Java", [Онлайн] Available at: <https://www.sqrlab.ca/papers/SPAQu09.pdf> (09.09.22)
3. Brössler, P. & Prechelt, L. & Tichy, W. F. & Unger, B. & Votta, L. G. (2000). "A Controlled Experiment in Maintenance Comparing Design Patterns to Simpler Solutions", *IEEE Transactions on Software Engineering*.
4. Brown, W.J., Malveau, R.C., Brown, W.H., McCormick III, H.W., Mowbray, T.J. (1998). "Anti Patterns: Refactoring Software, Architectures, and Projects in Crisis", 1st edn. John Wiley and Sons.
5. Brown, W. et. al. (2022). "AntiPatterns" [Онлайн] Available at: <http://antipatterns.com> (09.09.22)
6. Chambers, C. & Harrison, B. & Vlissides, J. (2000). "A debate on language and tool support for design patterns", *the 27th Conference of Principles of Programming Languages*, ACM press, pp. 277-289.
7. Esas, Ö. (2021). "Design Patterns and Anti-Patterns in Microservices Architecture: A Classification Proposal and Study on Open Source Projects", [Онлайн] Available at: https://www.politesi.polimi.it/bitstream/10589/186745/3/2022_04_ESAS.pdf (9.09.22)
8. Ezerskis, D. & Simutis, R. (2005). "Using Design Patterns for design and programming of complex automation control algorithms", ISSN 1392 – 124X *Information technology and control*, Vol.34, No.1.
9. Fowler, M. & Beck, K. & Brant, J. & Opdyke, W. & Roberts, D. (2002). "Refactoring: Improving the Design of Existing Code". Addison-Wesley.
10. Gamma, E., Helm, R., Johnson, R., Vlissides, J. (1994). „Design Patterns — Elements of Reusable Object-Oriented Software“, Addison-Wesley.
11. Kralj, K. (2022). "15 of the Worst C# Anti-Patterns Developers Keep Using (And How to Avoid Them)" [Онлайн] Available at: <https://methodpoet.com/worst-anti-patterns/> (09.09.22)
12. Mohammed, M. Elish, M. and Qusef, A., (2016). "Empirical insight into the context of design patterns: Modularity analysis", *7th International Conference on Computer Science and Information Technology (CSIT)*, pp. 1-6, doi: 10.1109/CSIT.2016.7549474.
13. Neill, C. & Laplante, P. (2006). "Paying down design debt with strategic refactoring," *Computer*, vol. 39, no. 12, pp. 131-134.
14. Parusheva, S., Aleksandrova, Y. (2021). "Innovations In The Construction Sector Through Legislation And Policies For Its Digitalization", *International scientific and practical conference "Construction entrepreneurship and real property"*, University of Economics - Varna, issue 1, pp. 82-88.
15. Petrov, P. , Ivanov, S., Dimitrov, P. (2021). "Projects Management in Technology Start-ups for Mobile Software Development", *International Journal of Interactive Mobile Technologies (iJIM)*, Vol. 15, No. 07, 2021, pp. 194-199.

16. Refactoring guru, (2022). *“Design Patterns”*, [Онлайн] Available at: <https://refactoring.guru/design-patterns/>(31.08.22)
17. Sourcemaking, (2022). Design Patterns. [Онлайн] Available at: https://sourcemaking.com/design_patterns (23.07.2022)
18. Vasilev, J. (2021). “Banking Software Upgrade - Generating The Gdpr Declaration”, *Protection of the personal data and the digitalization - challenges and perspectives 2021*, issue 1, pp. 56-63.

ASSESSMENT OF FOREIGN DIRECT INVESTMENTS IMPACT OF THE INVESTMENT PROCESS OF EU CANDIDATE COUNTRIES

Konstantin Kapitanov, PhD

University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: OLS regression models, classic panel regression models, partially adjusted panel regression models are developed on an experimental basis. Different results are compared.

Keywords: Foreign direct investment; Investment process; Panel regression; EU candidate countries

JEL code: F21, C3

ОЦЕНКА НА ВЛИЯНИЕТО НА ПРЕКИТЕ ЧУЖДЕСТРАННИ ИНВЕСТИЦИИ ВЪРХУ ИНВЕСТИЦИОННИЯ ПРОЦЕС НА СТРАНИТЕ КАНДИДАТИ ЗА ЧЛЕНСТВО В ЕС

Д-р Константин Капитанов

Икономически университет – Варна, България

В средата на глобализация като главен инструмент на международната инвестиционна политика и световния инвестиционен процес се явяват преките чуждестранни инвестиции (ПЧИ). Те са мощен инструмент за развитие, както за страните които реализират изходящи потоци, така и за тези които се явяват инвестиционни реципиенти. Едновременно с доказано позитивното си икономическо въздействие, ПЧИ могат да бъдат и опасни особено в условия на развиващи се и трансформиращи икономики, които са уязвими. Именно такъв специфичен случай представляват страните кандидати за членство в ЕС.

Актуалността на проблема се свежда до необходимост от детайлен анализ на нетните потоци входящи и изходящи ПЧИ и техният икономически ефект върху вътрешните инвестиции.

Научна цел в емпиричен аспект на настоящия доклад е икономико – статистически анализ и иконометрично моделиране на влиянието на преките чуждестранни инвестиции върху вътрешните инвестиции.

Класическите теоретични постулати на Хаймър, Върнан, Алибер и Дънинг отчитат ПЧИ като носители на икономически растеж, но задължително засягат въпроса за позиционирането на инвестиционната активност при несвършени пазари, конкурентна среда. Синтеза от основни класически теории свързани с международния инвестиционен процес и влиянието на ПЧИ в колаборация с резултати от съвременни изследвания разширява хоризонта в релацията: преки чуждестранни инвестиции – вътрешни инвестиции. Съвременните емпирични изследвания подкрепят тезата за детерминиращото влияние на ПЧИ върху вътрешните инвестиции. Изборът да се оцени влиянието на ПЧИ върху вътрешните инвестиции именно при страните – кандидати за членство в ЕС засяга проявлението на изследователския проблем в среда на специфични условия.

На база предварителен авторов подбор са включени избрани страни – кандидати за присъединяване към ЕС. Официално към 2022 г. държавите в процес на транспониране (включване) на законодателството на ЕС в националното си законодателство са: Албания, Северна Македония, Сърбия, Турция, Украйна, Черна гора. В изследването не е включена Турция. Основни причина за това са: сложната религиозно – политическа обстановка в страната, силно развитата икономика, което прави страната несъпоставима с останалите в групата. Към 2022 г. потенциалните кандидати за членство в ЕС са Босна и Херцеговина и Косово. Към страните – кандидати за присъединяване е включена Босна и Херцеговина. Едва през 2014 г. в Брюксел се парафира Споразумение за стабилизиране и асоцииране между ЕС и Косово, но страната е далеч от това да отговори на условията за членство и да приложи правилата и разпоредбите на Съюза. В изследването не е включена Украйна предвид военното положение в страната и подтикнатата спонтанна кандидатура. Към групата е включена Исландия предвид близкото сътрудничество и тесните връзки на страната с ЕС и членството на страната в Шенгенското пространство. Към 2022 г. кандидатурата на страната за членство в ЕС е официално замразена, не и прекратена, като се наблюдава засилен обществен отзвук в полза възобновяване на преговорите за членство в ЕС.

На база експеримент са разработени множествени регресионни модели. С цел прецеждане на основната закономерност по метода на включването се добавят допълнителни съществени фактори. Форматът на традиционния, балансиран панелен анализ е подходящ за прилагане на OLS регресия, класическа панелна регресия с фиксирани и случайни ефекти и специфичния частично аджустиран панелен регресионен модел с включена лагова променлива. Като основна хипотеза в настоящия доклад е, че експериментирането на различни иконометрични модели води до различни резултати и съответни изводи.

Използват се годишни данни за периода 1995 г. – 2013 г. Необходимо е да бъде поставено времево ограничение на изследването с основна цел обосновка на избрания изследователски период, която се уповава на някои основни моменти:

1. Изискванията за членство в ЕС заложили в Копенхагенските критерии от 1993 г. - стабилност на институции, функционираща пазарна икономика и др. представляват пресечната точка между единна европейска политика и икономическа рамка.

2. В доклад на Световната банка през 1995 г. страните от ЦИЕ показват първи признаци на икономическо съживяване след падане на комунизма. Премахването на югославията през 1995 г. поставя край на изкуствената изолация на балканския икономически регион и води до напредък в интеграцията на страните в него към ЕС.

3. Основна цел е проследяване на устойчивост в изследваните икономически закономерности около основната връзка ПЧИ - вътрешни инвестиции без допълнителни условия които да водят до екстремуми които не са предмет на анализа.

В таблица 1 са изведени променливите включени в емпиричната разработка и техните източници.

Таблица 1

Дефиниции на променливите и техните източници

Променлива	Дефиниция	Дефиниция	Източник
DI	Domestic investment	Вътрешни инвестиции	World Economic Outlook database, 2014
RGDPG	Real GDP growth	Темп на растеж на реален БВП	World Economic Outlook database, 2014
Inflation	Annual inflation rate	Инфлация	World Economic Outlook database, 2014
Saving	Gross national saving	Брутно национално спестяване	World Economic Outlook database, 2014
M2	Money and quasi money (M2) as % of GDP	Пари и квази пари (M2) като процент от БВП	World Economic Outlook database, 2014
Openness	Merchandise trade as % of GDP	Стокообмен като % от БВП	World Development Indicators 2014
FDI inflows	Foreign direct investment inflows	Входящи потоци ПЧИ	UNCTAD's World Investment Report 2014
FDI outflows	Foreign direct investment outflows	Изходящи потоци ПЧИ	UNCTAD's World Investment Report 2014
FDI inflows % GDP	Foreign direct investment inflows % of GDP	Входящи ПЧИ като % от БВП	UNCTAD's World Investment Report 2014
FDI outflows % GDP	Foreign direct investment outflows % of GDP	Изходящи ПЧИ като % от БВП	UNCTAD's World Investment Report 2014
FDI inflows % of total world	Foreign direct investment inflows % of total world	Входящи ПЧИ като % от всички цял свят	UNCTAD's World Investment Report 2014
FDI outflows % of total world	Foreign direct investment outflows % of total world	Изходящи ПЧИ като % от всички цял свят	UNCTAD's World Investment Report 2014

Вътрешните инвестиции (DI) се явяват зависимата променлива в апробираните регресионни модели. Могат да бъдат счетени за макроикономически катализатор на добър инвестиционен климат, стабилна и сигурна конюнктурна среда, устойчив икономически растеж. От друга страна

вътрешните инвестиции са следствие от макроикономически фактори пряко участващи в техния генезис: потоци входящи и изходящи ПЧИ като % от БВП (FDI outflows/GDP, FDI inflows/GDP); брутно национално спестяване (GNS); темпове на растеж на БВП (RGDPG); инфлация (Inflation); отвореност на икономиката (Openness); паричен агрегат М2 % от БВП (M2/GDP).

В своята същност OLS регресионният модел пренебрегва времевите измерения и индивидуалните характеристики на изследователските единици и се фокусира единствено върху зависимостта между тях. Моделът не допуска индивидуалните различия, като обединява заедно данните за отделните единици. Оценките от провеждане на OLS регресии по характер са близки до тези които може да се получат от обикновена линейна регресия.

Таблица 2

Резултати от OLS регресия

Факторни променливи	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Изходящи потоци ПЧИ/БВП P>[t]	0.1435562 0.046	0.1191916 0.084	0.1025986 0.106	0.0884587 0.172	0.0682842 0.279
Входящи потоци ПЧИ/БВП P>[t]	0.0164413 0.756	-0.0041123 0.935	0.0411756 0.389	0.0516796 0.290	0.0750694 0.120
Брутно национално спестяване P>[t]	0.2084418 0.017	0.1283449 0.135	0.0849512 0.285	0.0808093 0.309	0.1092925 0.161
Темп на растеж на реален БВП P>[t]		0.5157589 0.001	0.4894021 0.001	0.4809955 0.001	0.5011819 0.000
Инфлация P>[t]			-0.1641071 0.000	-0.16887869 0.000	-0.1301511 0.01
Отвореност P>[t]				-0.0305849 0.028	-0.0060391 0.836
Паричен агрегат М2/БВП P>[t]					0.0654114 0.006
Константа P>[t]	18.51206 0.000	18.06302 0.000	19.74837 0.000	21.91052 0.000	16.3445 0.000
Брой наблюдения	114	114	114	114	114
R ²	0.0947	0.1837	0.3155	0.3227	0.3690
F	3.84	6.13	9.95	8.50	8.86

В табл. 2 са представени резултати от значимите OLS регресионни модели. При всички изведени модели не се открива значима връзка между входящите потоци ПЧИ и вътрешните инвестиции. Единствено при модел (1) се наблюдава слаба положителна връзка между изходящите ПЧИ и вътрешните инвестиции. Тези резултати са логични предвид изключително ниските нива на привлечени ПЧИ за периода спрямо социално – икономическата, политическа и пазарна специфика на страните. В изведените значими коефициенти от OLS регресионните модели изпъква влиянието на темпа на растеж на БВП и инфлацията. Коментарът в тази посока следва диаметралните ефекти на двата фактора върху вътрешните инвестиции. При модели (2) – (5) от проведения OLS регресионен анализ на страните-кандидати за членство в ЕС, темпът на растеж на БВП корелира пряко в положителна и стабилна връзка с вътрешните инвестиции. Негативното влияние на инфлацията върху вътрешните инвестиции описва в

пълнен аспект съвременната макроикономическа нестабилност. Дебалансирайки съотношението пари – блага, инфлацията влияе пряко върху съвкупното производство, предприемаческата активност и реализацията на вътрешни инвестиции.

Таблица 3

Резултати от класически панелни модели с фиксирани ефекти

Факторни променливи	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Изходящи потоци ПЧИ/БВП P>[t]	0.0662925 0.199	0.0359867 0.453	0.0378475 0.424	0.0451218 0.356	0.0365711 0.466
Входящи потоци ПЧИ/БВП P>[t]	-0.0147071 0.775	-0.0068568 0.885	0.010435 0.827	0.0032432 0.947	0.0101201 0.840
Брутно национално спестяване P>[t]	0.1677732 0.020	0.0855582 0.212	0.0797944 0.239	0.0848967 0.215	0.1089654 0.148
Темп на растеж на реален БВП P>[t]		0.4276132 0.000	0.4166658 0.000	0.4064277 0.000	0.4261496 0.000
Инфлация P>[t]			-0.0523291 0.065	-0.0514106 0.071	-0.045294 0.125
Отвореност P>[t]				0.0256983 0.523	0.0004761 0.993
Паричен агрегат M2/БВП P>[t]					.0234806 0.434
Константа P>[t]	0.6828945 0.000	0.6835788 0.000	0.6456845 0.000	0.6466864 0.000	0.6318549 0.000
Брой наблюдения	4.713269 0.015	4.308545 0.016	5.531096 0.004	3.746957 0.265	4.292891 0.213
R ²	114	114	114	114	114
F	0.6181	0.6918	0.7034	0.6973	0.7020

Резултатите от панелния модел с фиксирани ефекти са видоизменени спрямо OLS оценките и категорично затвърждават изходящите ПЧИ като фактор с положително влияние върху вътрешните инвестиции. В тази връзка се оборва тезата, че за страните в преход входящите ПЧИ са носители на икономически растеж. Ръстът на БВП влияе положително върху вътрешното натрупване. Инфлацията логично представлява статистически значим негативен фактор при почти всички модели и тя е индикатор за макроикономическа нестабилност.

Предвид генезиса на ПЧИ и времето необходимо на отделните икономики за реакция от тяхното присъствие е необходимо да се извърши добра преценка дали класическия панелен регресионен подход е ефективен в достатъчна степен. Основните теории свързани с ПЧИ разглеждат времето като необходим фактор за абсорбция на чуждестранните капитали, насочването им в конкретни приоритетни направления и тяхното икономическо импортиране. Множество автори при изследване ефектите от потоците ПЧИ описват като необходимост включване на „времето“ като факторна променлива. Основната идейна формулировка за приложение на частично аджустирания модел е да се измери скоростта на агрегиране на вътрешните инвестиции като ендогенна променлива.

Таблица 4

Резултати от частично аджусиран панелен модел с фиксирани ефекти

Факторни променливи	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Изходящи потоци ПЧИ/БВП P>[t]	0.1919469 0.006	0.1619447 0.018	0.1485766 0.021	0.1533522 0.022	0.1072002 0.111
Входящи потоци ПЧИ/БВП P>[t]	-0.025536 0.720	-0.0177427 0.796	0.028965 0.661	0.024371 0.721	0.0511108 0.448
Брутно национално спестяване P>[t]	0.0805222 0.413	-0.0012959 0.989	-0.0037728 0.968	-0.0005836 0.995	0.1082995 0.285
Темп на растеж на реален БВП P>[t]		0.425097 0.003	0.3968876 0.003	0.3903017 0.005	0.4743479 0.001
Инфлация P>[t]			-0.1365816 0.000	-0.1360764 0.000	-0.102367 0.009
Отвореност P>[t]				0.0164816 0.767	-0.0881419 0.198
Паричен агрегат М2/БВП P>[t]					0.0982226 0.013
Константа P>[t]	20.46988 0.000	20.08324 0.000	20.99174 0.000	19.86287 0.000	20.60045 0.000
Брой наблюдения	114	114	114	114	114
R ²	0.0746	0.1570	0.2968	0.2856	0.3056
F	3.16	4.86	7.10	5.88	6.22
Факторни променливи	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Изходящи потоци ПЧИ/БВП P>[t]	0.1919469 0.006	0.1619447 0.018	0.1485766 0.021	0.1533522 0.022	0.1072002 0.111
Входящи потоци ПЧИ/БВП P>[t]	-0.025536 0.720	-0.0177427 0.796	0.028965 0.661	0.024371 0.721	0.0511108 0.448
Брутно национално спестяване P>[t]	0.0805222 0.413	-0.0012959 0.989	-0.0037728 0.968	-0.0005836 0.995	0.1082995 0.285
Темп на растеж на реален БВП P>[t]		0.425097 0.003	0.3968876 0.003	0.3903017 0.005	0.4743479 0.001
Инфлация P>[t]			-0.1365816 0.000	-0.1360764 0.000	-0.102367 0.009
Отвореност P>[t]				0.0164816 0.767	-0.0881419 0.198
Паричен агрегат М2/БВП P>[t]					0.0982226 0.013
Константа P>[t]	20.46988 0.000	20.08324 0.000	20.99174 0.000	19.86287 0.000	20.60045 0.000
Брой наблюдения	114	114	114	114	114
R ²	0.0746	0.1570	0.2968	0.2856	0.3056
F	3.16	4.86	7.10	5.88	6.22

Получените резултати представени в табл. 4 потвърждават категорично правата връзка темп на растеж на БВП – вътрешни инвестиции. В дългосрочен план единствено при модел (1) се открива статистически значим корелационен коефициент на факторната променлива брутно национално спестяване. За разлика от останалите регресионни модели попаднали в експерименталния анализ при

аджустирания модел в дългосрочен план не се разглежда негативната роля на инфлацията при страните – кандидати за членство в ЕС. Не се проявяват значими статистически коефициенти при факторни променливи: инфлация, икономическа отвореност и паричен агрегат М2. Основна разлика с класическата панелна регресия е, че не се открива връзка в дългосрочен план по линия потоци ПЧИ – вътрешни инвестиции.

Може да се обобщи, че в дългосрочен план върху вътрешните инвестиции съществено влияние при почти всички модели (2) – (5) оказва единствено темпът на растеж на БВП. Това е логичен резултат предвид преходния характер на икономиките. Темпът на растеж на БВП е пряк измерител на нивата на икономическа активност.

Икономическата теория разглежда ПЧИ като един от основните инструменти за развитие на икономиката, особено на по - малки страни и страни с по - ниска степен на икономическо развитие. В качеството си на основен двигател на международния инвестиционен процес, ПЧИ доказано от множество емпирични изследвания оказват влияние върху вътрешните инвестиции на отделните икономики. Различната степен на икономическо развитие заедно със социално – политически детерминанти са фактори които създават различна среда за проявление на връзката ПЧИ – вътрешни инвестиции.

Страните - кандидати за членство в ЕС се характеризират с недоразвит пазар, който трябва да се възползва ефективно от всички предприєдинителни финансови програми на ЕС. Това трябва да създаде необходимата среда за привличане на чуждестранни инвестиции и да се изградят политики за тяхното насочване в приоритетни сектори.

Различните иконометрични модели достигат до различни резултати като за най – ефективен може да бъде счетен частично аджустирания панелен модел в който се включва и времето като фактор. Получените резултати са устойчиви относно проявлението на корелационните зависимости между вътрешните инвестиции от една страна и преките чуждестранни инвестиции и други макроикономически фактори.

Общият извод е, че не всяка ПЧИ води непременно до увеличаване на брутното капиталообразуване. Необходимо е разработване на механизми за интеграция на различни по степен на развитие пазари, както и разработване на нови инструменти за инвестиране, неотчетени в ПЧИ.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Aliber, R. (1970). A Theory of Direct Foreign Investment. //The International Corporation, Cambridge, MA, MIT.
2. Dunning, J. (1977). Trade, Location of Economic Activity and the MNE: A Search for an Eclectic Approach. //The International Allocation of Economic Activity: Proceedings of a Nobel Symposium, London, Macmillan Press.
3. Gargov, V. i dr. (2010). Mezhdunaroden ikonomiks, Varna: Nauka i ikonomika.
4. Khan, M., Ross, K. (1977). The functional form of the aggregate import demand equation. Journal of International Economics., Vol 7.
5. Kolev, K. (2012). Globalizatsiya, transnatsionalni korporatsii i regionalno razvitie. Varna: Steno.

6. Kojima, K. (1982). Macroeconomic versus international business approach to FDI. //Hitotsubashi Journal of Economics.
7. Marinov, G. (2014). Panelni edinichni koreni i kointegratsiya. Izdatelstvo „Ongal“, Varna.
8. Stoykov, I., Momchev, S. (2003). Mezhdunarodna investitsionna politika. Svishtov.
9. Unctad, World Investment Report, 1995 – 2013.
10. Vernon, R. (1966). International Investment and International Trade in the Product Cycle. //Quarterly Journal of Economics.
11. Vladimirov, V. i dr. (2005). Makroikonomika. Varna: Steno.
12. www.worldbank.org
13. www.imf.org
14. www.unctad.org
15. www.wto.org

PLANNING OF DELIVERY ROUTES USING THE LINEAR PROGRAMMING MODEL

PhD Student Julieta Mihaylova
University of Economics - Varna, Bulgaria

Abstract: *The distribution of goods is related to significant transport costs. Reducing them is essential for the success of every company. This paper proposes a model for minimizing the transport costs of a small company engaged in distribution activities. The model is based on the mixed integer linear programming problem. The optimal criteria is the minimum of the traveled kilometers. The solution of the model is a plan for using the vehicles by routes, objects and number of courses. The linear optimization leads to a fully deterministic solution.*

Keywords: *Goods Distribution; Linear Optimization; Transport Costs*

JEL code: *C61*

ИЗПОЛЗВАНЕ НА ЛИНЕЕН ОПТИМИЗАЦИОНЕН МОДЕЛ ЗА ПЛАНИРАНЕ НА ДОСТАВКИ ПО МАРШРУТИ

Докторант Жулиета Михайлова
Икономически университет – Варна, България

Въведение

Икономиката изучава производството, разпределението, търговията и потреблението на стоки и услуги (Krugman & Wells, 2013). Процесите на разпределение и търговия са свързани с използване на транспорт. В някои случаи транспортните разходи могат да достигнат до 10% от крайната цена на продукта. Емпирично е установено, че увеличаването на транспортните разходи с 10% води до намаляване на обема на продажбите с 20% (Rodrigue, 2020).

Влиянието на транспортните разходи върху търговията обективно налага тяхното оптимизиране. Редица изследователи предлагат модели на мрежи от складове и крайни потребители, включително с възможност за споделяне на транспортните средства и маршрутите (Adelzadeh, Asl, & Koosha, 2014), (Brandão, 2020), (Yang & Wang, 2022). В някои случаи в мрежата се включват и производителите (Cintrón, Ravindran, & Ventura, 2010). Използват се различни алгоритми за решаване на оптимизационната задача – както линейната оптимизация, така и вероятностни методи. Във всички цитирани случаи се забелязва привързване на модела към особеностите на реалната система. Налага се изводът, че към момента не съществува универсален, приложим навсякъде модел. Целесъобразно е за всяка конкретна ситуация, изхождайки от фундаменталните оптимизационни задачи да се разработва модел за конкретно приложение.

В настоящата разработка се предлага модел за оптимално използване на транспортни средства от малка дистрибуторска фирма, притежаваща един склад и снабдяваща голям брой обекти (клиенти). Доставките се извършват на база предварителни заявки, които се правят от клиентите до края на предходния

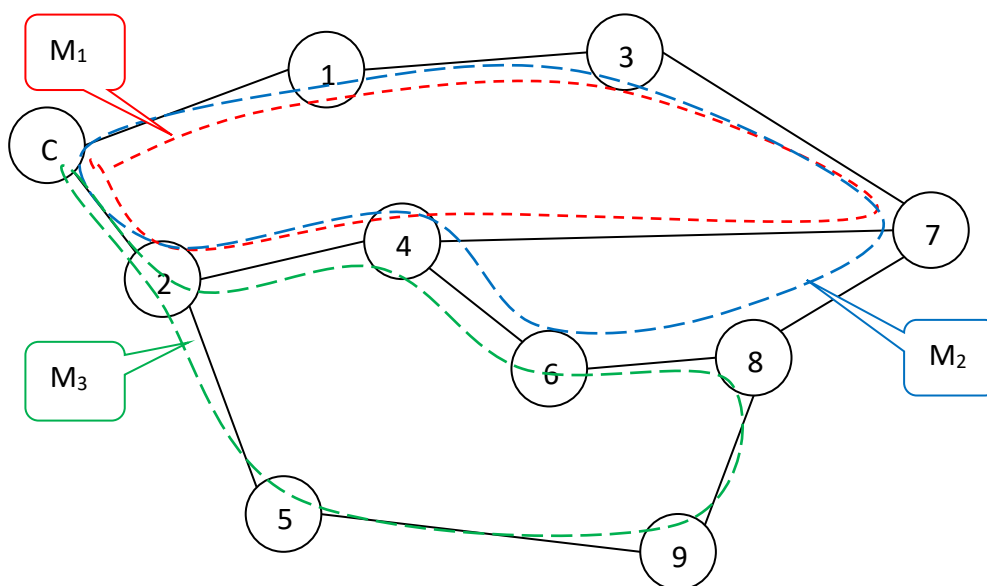
работен ден. Транспортирането се извършва по няколко маршрута, като по всеки маршрут се обхождат различни клиенти. Възможно е един и същ клиент да бъде обслужен по повече от един маршрут. По всеки маршрут могат да се извършат няколко курса. Транспортните автомобили са еднотипни, с една и съща товароподемност и с всеки от тях могат да се извършват по няколко курса на ден.

Очевидна е необходимостта от ежедневно съставяне на план за доставките, който да бъде оптимален. Като критерий за ефективност е избрана минимизацията на сумата от дължината на всички изпълнени курсове (общия брой изминати километри за деня). Счетено е за целесъобразно използването на частично целочислена задача на линейното оптимизиране, като част от целочислените променливи заемат стойности 0 или 1. Подобен модел, например, е описан от (Tang, 2004).

Формализиран модел:

Нека всеки от автомобилите на фирмата има товароподемност a тона. Броят на клиентите е n на брой търговски обекти. С автомобилите могат да се извършват по няколко курса на ден.

Разработени са p на брой маршрута за извършване на доставките, като един и същи търговски обект може да се обслужва от повече от един маршрут (фиг. 1).



Фиг. 1. Схематично изображение на склада (C), обектите и маршрутите

Източник: Собствена разработка.

Известна е дължината на всеки маршрут. Количествата на заявените за доставка стоки са различни за всеки ден. При изпълнението на ежедневните заявки, количествата стока за всеки обект са различни.

Необходимо е да се състави план за превоза, така че да се удовлетворят потребностите на търговските обекти, като сумарната дължина на изминатия път да бъде минимална.

Нека количеството на стоката, която трябва да бъде доставена до j -ия обект е равно на b_j , $j = \{1, 2, \dots, n\}$. В зависимост от обема на доставките, по един и същи маршрут е възможно да се извършат няколко курса. Максималният брой на курсовете по един маршрут не може да надвишава:

$$d_k = \left\lceil \frac{\sum_{j \in M_k} b_j}{a} \right\rceil, \text{ където} \quad (1)$$

M_k , $k = \{1, 2, \dots, p\}$ е множеството на търговските обекти, принадлежащи на k -тия маршрут.

Възможно е всички обекти да бъдат обслужени от курсове, минаващи само по един маршрут, т.е. в математическия модел на задачата следва да се предвиди възможен брой курсове в съответствие с (1).

Въвежда се единна номерация на курсовете $i = \{1, 2, \dots, m\}$, като курсовете с номера от 1 до d_1 минават по първия маршрут; курсовете с номера от $d_1 + 1$ до $d_1 + d_2$ минават по втория маршрут и т.н.

x_{ij} ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$) означаваме количеството стока, което ще се достави до j -тия обект с i -тия курс. В общия случай, не всички маршрути минават през всеки обект, затова съществуват индекси (i, j) , които не се използват.

Въвеждат се следните групи ограничения:

Ограничение, касаещо невъзможността за надвишаване на капацитета на товарния автомобил:

$$1) \sum_{j \in M_k} x_{ij} \leq a, i = \{1, 2, \dots, m\} \quad (2)$$

Ограничение, изразяващо необходимостта от пълно задоволяване на потребностите на съответния търговски обект

$$2) \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \{1, 2, \dots, n\} \quad (3)$$

Ако лявата част на някое ограничение от първата група е различна от нула, това означава, че курсът се изпълнява. Ако лявата част е равна на нула, курсът не се изпълнява и не се изминават километри. Необходимо е да се въведат допълнителни променливи, които да изразяват изпълнението или неизпълнението на курса. Удобно е те да бъдат бинарни (ако курсът се изпълнява, променливата е 1, а ако не се изпълнява – 0). Означаваме ги с y_i и за тях са в сила ограниченията:

$$3) \frac{1}{a} \sum_{j \in M_k} x_{ij} \leq y_i \leq 1, i = \{1, 2, \dots, m\}. \quad (4)$$

От характера на задачата се налага ограничение, касаещо неотрицателността на променливите:

$$4) 0 \leq x_{ij}, i = \{1, 2, \dots, m\}, j = \{1, 2, \dots, n\}. \quad (5)$$

Целевата функция ще има вида:

$$\min : Z = \sum_{i=1}^n c_i y_i, \text{ където} \quad (6)$$

c_i е дължината на маршрута, по който минава i -тия курс.

При този математически модел от формална гледна точка винаги съществуват алтернативни екстремуми, тъй като целевата функция има една и съща стойност при преномериране на курсовете в рамките на един и същ маршрут. От икономическа гледна точка, обаче, тези екстремуми не би трябвало да се разглеждат като алтернативни.

Числов пример:

Нека за схемата на фиг. 1 е дадено:

а) дължина на маршрут $M_1 = 24$, на $M_2 = 26$, на $M_3 = 27$.

б) обем на доставките по обекти:

Обект	1	2	3	4	5	6	7	8	0
Доставка	0,1	0,1	0,1	0,5	0,6	0,5	0,8	0,9	0,8

в) капацитет на товарния автомобил – 2,5 тона.

Решение:

По формула (1) се изчислява максимално възможният брой курсове по всеки маршрут:

$$d_1 = \left\lfloor \frac{0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,5 + 0,8}{2,5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1,6}{2,5} \right\rfloor = 1$$

$$d_2 = \left\lfloor \frac{0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,5 + 0,5 + 0,8 + 0,9}{2,5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{2,5} \right\rfloor = 2$$

$$d_3 = \left\lfloor \frac{0,1 + 0,5 + 0,6 + 0,5 + 0,9 + 0,8}{2,5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3,4}{2,5} \right\rfloor = 2$$

Целевата функция е

$$\min: Z = 24y_1 + 26y_2 + 26y_3 + 27y_4 + 27y_5$$

Системите от ограничения са:

1. Свързани с капацитета на товарния автомобил:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{17} &\leq 2,5; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{26} + x_{27} + x_{28} &\leq 2,5; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{36} + x_{37} + x_{38} &\leq 2,5; \\ x_{42} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{48} + x_{49} &\leq 2,5; \\ x_{52} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{48} + x_{59} &\leq 2,5. \end{aligned}$$

2. Свързани с условието за пълно задоволяване потребностите на търговските обекти:

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 0,1; \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 0,1; \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 0,1; \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} &= 0,5; \\
&+ x_{45} + x_{55} = 0,6; \\
x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} &= 0,5; \\
x_{17} + x_{27} + x_{37} &= 0,8; \\
x_{28} + x_{38} + x_{48} + x_{58} &= 0,9; \\
&x_{49} + x_{59} = 0,8.
\end{aligned}$$

3. Свързани с извършване/неизвършване на курса:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2,5}(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{17}) &\leq y_1 \leq 1; \\
\frac{1}{2,5}(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{26} + x_{27} + x_{28}) &\leq y_2 \leq 1; \\
\frac{1}{2,5}(x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{36} + x_{37} + x_{38}) &\leq y_3 \leq 1; \\
\frac{1}{2,5}(x_{42} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{48} + x_{49}) &\leq y_4 \leq 1; \\
\frac{1}{2,5}(x_{52} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{58} + x_{59}) &\leq y_5 \leq 1.
\end{aligned}$$

4. Свързани с условието за неотрицателност и целочисленост:

$$0 \leq x_{ij}, i = \{1, 2, \dots, m\}, j = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$y_i \in N_0, i = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Решението е:

$$x_{21} = 0,1; x_{22} = 0,1; x_{23} = 0,1; x_{24} = 0,5; x_{26} = 0,5; x_{27} = 0,8$$

$$x_{45} = 0,6; x_{48} = 0,9; x_{49} = 0,8$$

Всички останали променливи $x_{ij} = 0$.

$$y_1 = 0; y_2 = 1; y_3 = 0; y_4 = 1; y_5 = 0$$

На един курс по маршрут 2 се натоварват доставките за обекти 1, 2, 3, 4, 6 и 7. Общото им количество е 2,1 тона.

На един курс по маршрут 4 се натоварват доставките за обекти 5, 8 и 9. Общото им количество е 2,3 тона.

Общото изминато разстояние за осигуряване на доставките е 53 км.

Изводи

Предлаганият модел е подходящ за оптимизиране на транспортните разходи при доставка на стоки от един източник (склад) до няколко приемника (търговски обекти). При промяна на структурата на системата моделът трябва да се модифицира.

Използването на апарата на линейното оптимизиране гарантира достигането на оптимално решение или установяването, че такова не съществува. Решението на задачата е детерминирано.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Adelzadeh, M., Asl, V. M., & Koosha, M. (2014). A mathematical model and a solving procedure for multi-depot vehicle routing problem with fuzzy time window and heterogeneous vehicle. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* , 75, 793-802.
2. Brandão, J. (2020). A memory-based iterated local search algorithm for the multi-depot open vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research* , 284 (2), 559-571.
3. Cintron, A., Ravindran, A. R., & Ventura, J. A. (2010). Multi-criteria mathematical model for designing the distribution network of a consumer goods company. *Computers & Industrial Engineering* , 58 (4).
4. Krugman, P., & Wells, R. (2013). *Ecionomics* (3rd Edition изд.). New York: Worth Publishers.
5. Rodrigue, J. P. (2020). *The Geography of Transport Systems*. London&NewYork: Routledge.
6. Tang, S. (2004). *Linear Optimization in Applications*. Hong Kong University Press.
7. Yang, T., & Wang, W. (2022). Logistics Network Distribution Optimization Based on Vehicle Sharing. *Sustainability* , 14 (4).

USING THE BOX - JENKINS METHOD TO ASSESS THE DYNAMICS OF WHOLESALSALES IN A SMALL DISTRIBUTION COMPANY

PhD Student Julieta Mihaylova
University of Economics - Varna, Bulgaria

Abstract: *The amount of weekly sales of given goods by a distributor to retailers is a random variable. The purpose of the distributor is to control the inventory for satisfying the customers' needs. If there is a shortage of stock, the distributor realizes lost profits. If there is a surplus the distributor realizes losses. To maintain optimal inventory levels, it is necessary to analyze the demand. In this paper it is suggested that the consumption is considered as a dynamic series. It is appropriate to use the Box-Jenkins method.*

Keywords: *Box-Jenkins Method; Goods Distribution; Time Series Analysis*

JEL code: *C22*

ПРИЛАГАНЕ НА ТЕОРИЯТА НА БОКС И ДЖЕНКИНС ЗА ОЦЕНКА НА ДИНАМИКАТА НА ПРОДАЖБИТЕ НА ЕДРО В МАЛКА ДИСТРИБУТОРСКА ФИРМА

Докторант Жулиета Михайлова
Икономически университет – Варна, България

Въведение

Веригата за доставки е система от организации, хора, технологии, дейности, информация и ресурси, участващи в преместването на продукт или услуга от доставчик към клиент. Снабдителните звена, като складове или дистрибуторски звена, са в основата на управлението на веригата за доставки. Най-общо се посочват три главни причини за поддържане на запаси – факторът време, икономическия ефект от обема на доставката и неопределеността. Факторът време зависи от продължителността на дейностите по документалната обработка на заявката, товаро-разтоварните работи, времето за транспорт. Икономическият ефект от обема на доставката се определя от факта, че доставките на точното количество ресурс, което е необходимо в точния момент на възникване на потребността, води до голям брой поръчки и до оскъпяване. Доставката на голямо количество ресурс пък изисква увеличаване на разходите му за съхранение. Класическият EОQ модел (Economic Order Quantity Model) определя оптималния размер на една доставка (Harris 1913). Той може да се използва с известни модификации, в зависимост от конкретните условия. На трето, но не на последно място е неопределеността. Търсенето, предлагането, времето за доставка и други характеристики зависят от много непредсказуеми фактори. В този смисъл поддържането на определено ниво на запас е буфер, който намалява риска от проявите на случайността (Rossi 2021, 25) .

При дистрибуция на стоки идеалният вариант е ежедневната потребност да бъде равна на складовата наличност. Ако нивото на запаса е по-ниско,

дистрибуторът пропуска ползи. Ако нивото е твърде високо, запасът не се реализира напълно. Необходими са средства за неговото съхранение, за обслужване на кредита за закупуването му и пр., което, естествено, води до загуби. Последствията могат да бъдат и още по-негативни, ако става дума за стоки с ограничен срок на потребление, като, например, хранителни продукти.

Ако потреблението е напълно детерминирано, снабдителната верига може да се основава на стратегията just-in-time, като, например снабдяването на Toyota Motor Corporation (Ohno 1988). Трябва да се отбележи, че тук става дума за един потребител, чиито нужди могат да се планират с точност. Дори и в тези идеални условия, обаче, е възможно в резултат на случайни фактори да възникнат сригове. През 1997 в резултат от пожар в завод, произвеждащ автомобилни части, Toyota Motor е принудена да спре работа за няколко дни (Reitman 1997). Този случай, обаче е единичен. За превенция само на такива редки явления едва ли е целесъобразно да се поддържа запас.

Различна е ситуацията, когато клиентите на дистрибутора са много на брой. В този случай търсенето е случайно. Случаите на недостиг или на излишък от запас са правило, а не изключение.

Целта на настоящата разработка е да се предложи начин за изследване на потребителското търсене на хранителни стоки, разпространявани от малка дистрибуторска фирма. Познаването на търсенето ще позволи разработване на стратегия за управление на запасите, която да минимизира рисковете от недостиг или от излишък.

Използвани са данни за продажбите на дистрибуторска фирма, като наименованията на отделните продукти са търговска тайна.

Обект на изследването и ограничения:

Изследването е ограничено в периода 2017-2021 години. Фирмата попълва запасите си предимно от производители. Много рядко, за изпълнение на комплексна заявка от важен клиент се закупуват до 1-2 артикула от друг дистрибутор.

Доставките от производителите се изпълняват почти винаги в пълен обем. В много редки случаи може да не бъде доставена някоя от позициите на заявката. Като пример може да се посочи един от производителите на млечни продукти, който за продължителен период не изпълнява заявка за прясно мляко. Причината е, че предпочита да натовари пълно мощностите си за производство на млечни продукти, от които се реализира по-голяма печалба.

През наблюдавания период е констатиран един случай, в който голям производител прекратява напълно деловите си отношения с дистрибуторската фирма без да посочи основателна причина.

Може да се направи извода, че попълването на запасите във фирмата е в общи линии детерминирано.

По различен начин стои въпросът с продажбите. Фирмата снабдява голям брой търговци на дребно, които от своя страна продават на крайни потребители. Броят им и броят на продаваните артикули по години е представен в табл. 1.

Таблица 1

Брой клиенти и търгувани артикули за 2017-2021 година

Година	Брой клиенти	Брой артикули
2017	1471	902
2018	1438	980
2019	1298	1008
2020	1102	1167
2021	1037	1189

Източник: Собствена разработка

Заявките на търговците на дребно зависят от пазарното търсене, което е случайно. Това и големият брой на търговците на дребно определя случайния характер на необходимите запаси.

Може да се направи изводът, че като основа за изработване на стратегия за управление на запасите е необходимо да се изследват главно параметрите на потребителското търсене.

Фирмата работи в дните понеделник-петък. Доставяните хранителни стоки са пакетирани и имат срок на съхранение, позволяващ реализацията им в рамките на 5-7 дни и повече. За целите на анализа, като единица време може да се приеме работната седмица. За всеки конкретен продукт е необходимо да се планира седмичен запас, който да осигури задоволяване на потребностите на клиентите при минимални излишъци.

Математически модел:

В някои класически модели за управление на запасите при случайно търсене се предполага, че е известен законът на разпределение на търсенето (Атанасов, и др. 2015, 429). За изследвания случай се оказва, че това не може да бъде практически изпълнено, тъй като потреблението не е стационарно. Усреднени данни за даден период са неприложими за следващите периоди. Както показва опитът от пандемията с Covid-19, търсенето силно се влияе и от практически непредсказуеми явления. Налага се изводът, че дългосрочното планиране е трудно приложимо.

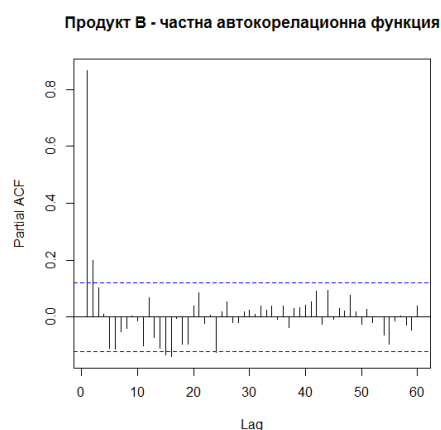
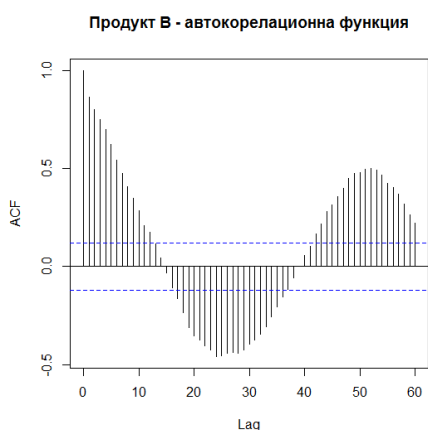
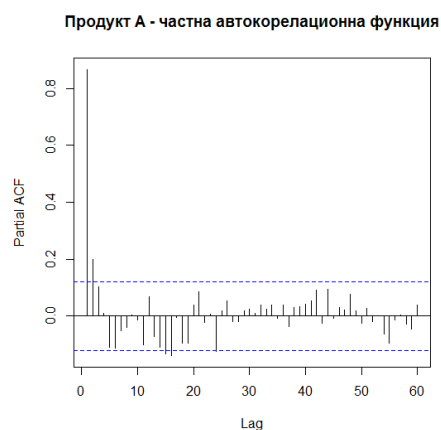
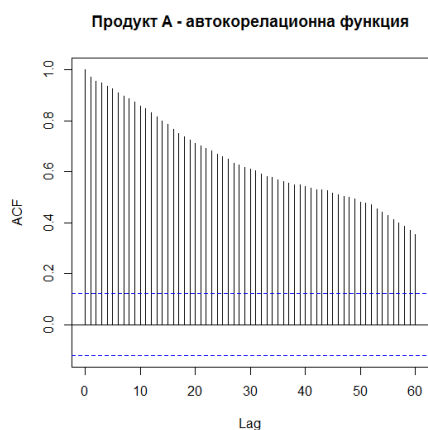
Възможно е, обаче, да се възприеме по-различен подход. Обобщените стойности на потреблението могат да се разглеждат като динамичен ред от вида

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_t, \dots, Y_n, \quad (1)$$

На фиг. 1 са показани два такива динамични реда, заедно с автокорелационните и частните автокорелационни функции.

Един от начините за анализ и прогнозиране на такива редове е подходът на Бок-Дженкинс, който води до използване на модели от тип ARIMA (Бок, и др. 2016). При него се изисква редовете да са стационарни или да се приведат към стационарни.

Оценките на автокорелационните функции и на двата процеса показват ясно изразена нестационарност. Единият ред (В) има явно изразен цикличен характер, което се потвърждава и от оценката на автокорелационната му функция. По графиката на другия също може да се предположи цикличност, но оценката на автокорелационната му функция не потвърждава това.



Фигура 1. Потребление на продукты за периода 2017-2021 год.
Источник: Собственная разработка.

В методологията на Box-Jenkins за отстраняване на нестационарността обикновено се използва привеждане на първоначалния ред към ред от първи, втори и т.н. разлики:

$$\begin{aligned}\Delta_t &= Y_{t+1} - Y_t \\ \Delta_t^2 &= \Delta_{t+1} - \Delta_t\end{aligned}\quad (2)$$

...

Някои автори препоръчват първоначално логаритмуване на стойностите на реда и след това привеждане към ред от разликите (Asteriou and Hall 2021):

За оценка на стационарността на изходните и на приведените редове беше приложен тестът на Ljung-Box, чиято статистика е

$$Q = n(n-2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}^2}{n-k} \quad (3)$$

където h е броят на изследваните лагове, $\hat{\rho}$ е коефициентът на автокорелация на k -тия лаг. Статистиката (3) има разпределение χ^2 с h степени на свобода. Избрано беше ниво на значимост $\alpha = 0,05$.

При работа в целия изследван времеви интервал, от 2017 до 2021 години, изследването показва, че редовете от разликите не могат да бъдат приети за стационарни с избраното ниво на значимост. Стойностите на статистиката надвишаваха критичните стойности, което даваше основание за отхвърляне на нулевата хипотеза за независимост на отделните наблюдения (т.е. за стационарност на реда).

При скъсяване на изследвания интервал до няколко десетки последователни наблюдения се установи, че редуцираните редове са нестационарни, а първите разлики на редуцираните редове са стационарни. В табл. 2 са показани някои от стойностите на Q статистиките на Ljung-Box за редуцирани редове и съответните критични стойности.

Таблица 2

Статистики на Ljung-Box за редуцирани редове

Ред	Брой лагове h	$\chi_{1-0,05}^2(3)$	Q
$Y_t^{(A)}, t = 1, 2, \dots, 50$	3	7,81	20,863 (нестационарен)
$Y_{t+1}^{(A)} - Y_t^{(A)}, t = 1, 2, \dots, 50$	3	7,81	2,07 (стационарен)
$Y_t^{(B)}, t = 1, 2, \dots, 50$	3	7,81	40,316 (нестационарен)
$Y_{t+1}^{(B)} - Y_t^{(B)}, t = 1, 2, \dots, 50$	3	7,81	2,09 (стационарен)

Източник: Собствена разработка

Следователно при намаляване на броя на наблюденията има възможност за анализ на търсенето да се използват модели от тип ARIMA.

Изводи

Анализът на динамиката на потреблението е основа за вземане на разумно обосновани бизнес решения в областта на дистрибуцията на стоки.

Направените частични експерименти показват, че при дълги редове привеждането в стационарен вид е свързано с трудности. В различните периоди на наблюдаваното явление има различни средни нива на потребление. Причините за това са различни – разлика в сезонното потребление, промяна на средата, катаклизми и др. Динамичният ред се превръща в сума от неизвестни величини и много трудно може да бъде разложен на съставните компоненти. Значително по-лесно е да се изследва един сравнително малък непрекъснат сегмент. Предполага се, че данните в него са породени при едни и същи условия и натрупаният краткосрочен опит може да бъде полезен. Обратно, отчитането на информация, възникнала при други от текущия момент условия, може да бъде даже вредно. Това именно показват и резултатите от експериментите.

Може да се счита, че методът на Box-Jenkins е приложим в разглеждания в настоящата работа случай. Една от възможните стратегии за управление на запасите е да се анализира потреблението за k лага (седмици) назад във времето и да се прави прогноза за следващия лаг (следващата седмица). Процесът на вземане на решение трябва да се изпълнява непрекъснато, като се анализират еднакви по дължина, „пълзящи“ по времевата ос сегменти от данни.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Asteriou, Dimitrios, Stephen G. Hall. (2021). *Applied Econometrics*. 4th. London: Red Globe Press.
2. Box, George E.P., Gwilym M. Jenkins, Gregory Reinsel, Greta M. Ljung. (2016) *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 5th. Hoboken: John Wiley & Sons.
3. Harris, Ford W. (1913). „How Many Parts to Make at Once.“ *Factory, The Magazine of Management*, p. 135-136.
4. Ohno, Taiichi. (1988). *Workplace Management*. Cambridge, Massachusetts: Productivity Press.
5. Reitman, Valerie. (1997). „Toyota Motor Shows Its Mettle After Fire Destroys Parts Plant.“ *Wall Street Journal*, 8 May 1997 г.
6. Atanasov, B., R. Nikolaev, T. Milkova, D. Mihaylov. (2015). *Izsledvane na operaciite*. Varna: Nauka i Ikonomika.

THE THEORETICAL-MULTIPLE APPROACH IN MATHEMATICS EDUCATION

Katya Chalakova

PMG „Ivan Vazov“ - Dimitrovgrad, Bulgaria

Donka Valeva

OU „Aleko Konstantinov“ - Dimitrovgrad, Bulgaria

Abstract: *The education and mental development of students is closely related to the didactic development of the learning content in mathematics. The theoretical-multiple approach is an essential part of the theoretical foundations for revealing regularities in mathematics. The requirements for logical consistency in their construction create a basis for the completion of the cognitive process. The main aspects related to the application of the set-theoretical approach in the study of mathematical concepts are considered in the present work in order to build students' knowledge, skills and competences for using mathematics as a way of thinking.*

Keywords: *Education; Mathematics; Theoretical-multiple approach*

JEL code: *C00, I20*

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННИЯ ПОДХОД В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

Катя Чалъкова

ПМГ „Иван Вазов“ - Димитровград, България

Донка Вълева

ОУ „Алеко Константинов“ - Димитровград, България

I. Принцип за системност

Дидактическите принципи са основни, изходни положения за функционална технологична организация на обучението. Те не са опора за теорията и практиката на обучението, а са част от тази теория и йерархически изпълняват базисни функции. Същността на принципа за системност се състои в усвояване то на знания, умения и компетенции в определена логическа връзка, в която водещо значение имат съществените признаци на предметите и явленията и тяхната съвкупност една система. Според Ушински (Ушински, 1949) под система се разбира множество от елементи с отношения и връзки помежду им, образуващи определена цялост. При прилагането на принципа за системност в обучението по математика новите понятия, усвоени от учениците, трябва да заемат своето логическо място в системата от познания, която те вече имат. Системността е своеобразна форма на организиране на учебния материал.

II. Основни положения от логиката

1. Съждение

По своята същност съждението е мисъл, за която може да се постави въпросът дали е вярна или не е вярна (Ганчев, 1968: 6-7).

В началните класове обучението е насочено към изграждане на основни умения за вярност на сложно съждение, което се състои поне от две прости съждения. Например: Навън грее слънце и духа вятър. Навън грее слънце или духа вятър. Съюзите „и“ и „или“ изпълняват ролята на логически връзки. Т.е. конюнкцията и дизюнкцията са основните понятия от теоретико-множествения подход, с които учениците се запознават. Тези понятия не съществуват с научните си наименования в учебния процес, но чрез тях започват да се изгражда учебния предмет математика. Така самият учебен предмет се развива като цялостна система, близка до научната систематичност.

2. *Конюнкция – ако p и q са съждения, то $p \wedge q$ е съждение. Приема се, че съждението $p \wedge q$ е вярно, ако и двете съждения p и q са верни.*

Първите логически връзки се появяват при изучаване на двуцифрени числа – двуцифрени число с различни цифри. Т.е. числото се състои от две цифри и те са различни. Ако едното от двете условия не е изпълнено, твърдението няма да е вярно. Запознаването с видовете триъгълници според ъглите и страните и понятието „равностранен триъгълник“ също съдържа в себе си прилагането на конюнкция. В следващите етапи (прогимназиален и гимназиален) от обучението в часовете по математика конюнкцията се прилага и за повече от две твърдения – решаване на уравнения, за извод за броя и вида на корените, при доказателства на геометрични задачи.

3. *Дизюнкция – ако p и q са съждения, то $p \vee q$ е съждение. Отговорът на въпроса кога дизюнкцията е вярна включва в себе си два случая:*

1 сл. неизключваща (нестрога) дизюнкция – когато поне едно от съжденията p и q е вярно, а когато и двете са неверни, $p \vee q$ също е вярно.

2 сл. изключваща (строга) дизюнкция – приема се, че $p \vee q$ е вярно когато само едно от съжденията p и q е вярно, а когато и двете са неверни (верни) – $p \vee q$ също е вярно.

В обикновените разговори при използване на съюз „или“ се има предвид, че е налице само една от двете възможности. По тази причина в обучението по математика (общозадължителна подготовка) се използва неизключваща дизюнкция. Например: Духа вятър или вали дъжд.

Използването на това понятие е в пряка зависимост от точната математическа реч и оттам правилните изводи, които показват трайност на знанията. Например: В началните класове учениците се запознават с правилото – ако един от множителите в дадено произведение е равен на нула, то и цялото произведение е равно на нула. В прогимназиален етап, при решаване на уравнение от вида $(ax+b)(cx+d)=0$, те трябва да съобразят, че корените на уравнението се намират от $ax+b=0 \vee cx+d=0$.

4. *Отрицание – ако p е съждение, то $\neg p$ е съждение. Приема се, че $\neg p$ е вярно твърдение, ако p е вярно, а когато p е вярно, $\neg p$ се приема за вярно.*

Първото запознаване с това понятие е още в първи клас когато ученици се запознават с действие изваждане. Отрицанието намира по-голямо приложение при усвояване на правилата за извършване на дадени действия. В VII клас се

въвежда знакът $\neq$, а в профилираната подготовка по математика учениците изучават и начина за доказване чрез допускане на противното.

5. *Импликация – ако p и q съждения, то $p \rightarrow q$ е съждение и се нарича импликация на p (предходник) и q (наследник).*

В часовете по математика често се използват съждения като следните:

- Ако даден триъгълник е равнобедрен, то всичките му ъгли и страни са равни.
- Ако $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, то $AB = A_1B_1$.
- Ако четириъгълника $ABCD$ е успоредник, то диагоналите AC и BD взаимно се разполовяват.

Почти всяка математическа теорема може да се изкаже във формата на импликация, като след съюза “ако” се изкаже условието на теоремата, а между условието и заключението се изкаже частицата „то“, т.е. като съждението, изразяващо условието на теоремата, се постави като предходник, а съждението изразяващо заключението $\dot{q}$, се постави за наследник. По този начин учениците придобиват умения за изказване на теоремите като условни.

Импликацията е в основата на синтетичния метод за решаване на задачи. Последователността в обучението по математика е свързана както с този метод, така и с аналитичния метод, т.е. аналитико-синтетичния метод, чрез който учениците се учат да изграждат компетенции за използване на теоретичните постановки в различни математически ситуации.

6. *Равнозначност – ако p и q съждения, то $p \leftrightarrow q$ е съждение и се нарича равнозначност на p и q .*

В математическа символика е прието за равнозначността да се използва знака „ $\Leftrightarrow$ “ – така се изказват теореми, изразяващи две взаимно обратни теореми. У учениците се изграждат умения за това кога две твърдения са едновременно верни и едновременно неверни.

Релациите „еквивалентност“ ($\Leftrightarrow$) и „следва“ ($\Rightarrow$) създават условия за съзнателност при усвояването на математическите правила, логически връзки при тяхното прилагане и преодоляване на формалните им знания.

В процеса на обучението по математика в училище последователно във всеки клас нараства сложността на връзката между знанията, уменията и компетенциите за извършване на дейности, свързани с вярното решаване на задачите. Налага се те да прилагат логически връзки за повече от две съждения, както и да прилагат различни връзки между тях. Например: ред на действията при извършване на аритметични операции с числа в начален етап, тъждествени преобразувания при изрази и решаване на уравнения, доказателство на връзки при геометрични задачи и други.

III. Теория на множествата – методически аспекти в прилагането ѝ

Множество е основно понятие в математиката. То не се дефинира, но неговото съдържание се разкрива чрез подходящи примери в учебното съдържание. В началните класове вместо това понятие се използва понятието „съвкупност“. „Теория на множествата“ е дял от математиката, който представлява основа на обучението за:

- дейност на учителя за представяне на учебното съдържание в закономерна последователност;
- определяне на насочеността на учебния процес за разширяване на придобитите знания;
- изграждане на логически връзки от конкретното към общото;
- оптимизиране на процеса на възприемане на новите знания, т.е. засилване на познавателната дейност на учениците;
- степента на познавателно развитие на учениците оптимално се надгражда и развива.

Задаване и означение.

От първи до шести клас задаването на множество се прави описателно като учениците изграждат умения за разбиране на елементите на дадено множество с определени характеристики и техните свойства.

Въвеждането на самото понятие „множество“ става в шести клас. Запомнянето на начините за записване на принадлежност към множество е необходимо за записването на решенията на геометрични задачи в следващите класове. За пръв път се въвежда и сечение на множества чрез онагледяване с кръговете на Ойлер-Вен. С практически задачи се обяснява и обединението на две множества, като се разглежда броят на елементите на обединението като от сбора на всички елементи се извади броят на елементите на сечението.

В осми клас в раздел „Комбинаторика“ изучаването продължава с разглеждане на начини за преброяване на елементи на крайни множества. Учениците се изграждат знания и умения за:

- прилагане на дизюнкция и конюнкция при елементите на множествата за прилагане на правилата за събиране и умножение на възможности (с всички или определени елементите на дадените множества);
- значението на наредбата на елементите при избор.

В девети клас теорията на множества учениците придобиват компетенции за връзка между изучаваните понятия и теорията на множествата – например, че несъвместимите събития са множества без общи елементи. Понятието „вероятност“ е тясно свързано със сечение и обединение на множества. Затвърждават се и основните действия със съждения – конюнкция, дизюнкция и отрицание.

От десети до дванадесети клас учениците прилагат придобитите знания при решаване на алгебрични и геометрични задачи, като използват основно правилата за доказване на логическите връзки между отделните елементи.

IV. Заключение

Теоретико-множественият подход изгражда логическа връзка между знанията, уменията и компетенциите и формирането им в обучението по математика. Създаването на умения за извършване на дадена дейност се основава върху придобитите знания за обектите, с които те са свързани, подпомага се ориентираността на обучаемите и поэтапно се формира всяко от тях, свързано с нови знания. Ефективността на учебния процес се осъществява с логическата конструкция – решението на задачата и психическия процес –

решаването на задачата. Съзнанието на ученика е ориентирано към определена цел.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Bankov, K., T. Stoeva, I. Tsvetkova, D. Petrova. (2017). Matematika, Kniga za uchitelya 8 klas. „Prosveta-Sofiya” AD.
2. Bankov, K., I. Tsvetkova, D. Petrova, G. Nikolova, S. Nakov. (2018). Matematika, Kniga za uchitelya 9 klas. „Prosveta-Sofiya” AD.
3. Ganchev, I. (1968). Nachalni poznaniya po matematicheska logika. Narodna prosveta, Sofiya.
4. Ganchev, I., Ĭ. Kuchinov. (1987). Organizatsiya i metodika na uroka po matematika. Narodna prosveta, Sofiya.
5. Ninkova, P., M. Lilkova, T. Stoeva, I. Sharkova, S. Stavrova. (2017). Matematika, Kniga za uchitelya 5 klas. „Prosveta-Sofiya” AD.
6. Ninkova, P., M. Lilkova, I. Sharkova, L. Radenkova. (2018). Matematika, Kniga za uchitelya 7 klas. „Prosveta-Sofiya” AD.
7. Ushinsky, K. (1949). Sobrani sochineniya. T.5., Moskva.

GEOMETRIC PROBABILITY

Maria Mitreva

"Hristo Botev" Language High School - Kardjali, Bulgaria

Abstract: *The proposed report addresses some basic principles for the nature and application of geometric probability. Specific tasks related to both basics and certain subtleties in their formulation and resolution have been proposed.*

Keywords: *probability, geometric probability.*

JEL code: C02

ГЕОМЕТРИЧНА ВЕРОЯТНОСТ

Мария Митрева

Езикова гимназия „Христо Ботев“ - гр. Кърджали, България

Фундаменталната математическа подготовка на учениците е предпоставка за успешното овладяване на редица специални дисциплини в различни специалности във висшите училища. Изучаването на случайни процеси е от голямо значение в различни области на науката и най-вече в икономиката. Това налага учениците да са много добре подготвени по отношение на основни знания по теория на вероятностите. Това обаче е тема, която не е достатъчно добре застъпена в училищния материал. Освен на класическия подход в теория на вероятностите трябва да се отделя повече внимание на геометричната вероятност, която се налага да се използва когато изходите от случаен експеримент са неизброимо множество.

Целта в настоящия доклад е да бъдат разгледани някои основни принципи на същността и приложението на геометрична вероятност, като се предлагат подходящи задачи, чрез които учениците и студентите да осмислят това понятие и да придобият умения за правилното му прилагане в различни практико-приложни задачи.

Стандартният начин за пресмятане вероятността за реализиране на дадено случайно събитие е като се използва формулата за класическа вероятност, а именно, ако:

A - случайно събитие;

$P(A)$ - вероятността да се реализира събитието A е

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (1)$$

където m е броят на благоприятните изходи за събитието A , а n е броят на всички изходи. Един елементарен пример за това е: Каква е вероятността от една урна, ако изберем произволна топка, тя да е бяла, при условие, че в урната има 3 бели и 4 черни топки?

Може да се пресметне по следния начин:

Събитието A е „извадената топка е бяла“. Броят на всички възможности е да изберем някоя от седемте топки, т.е. 7, а броят на благоприятните е 3, т.е.

$$P(A) = \frac{3}{7}.$$

Разбира се има и много по-сериозни задачи, свързани с формулата за класическа вероятност, където броят на всички, както и броят на благоприятните възможности се пресмятат на основата на редица формули, свързани със знания, базирани на комбинаториката.

Нека сега разгледаме един по-различен пример: Стреляме по мишена, която има кръгла форма с радиус 20 см, която се намира на стена във вид на правоъгълник с размери 3м×2м и се интересуваме каква е вероятността изстрелът да попадне в мишената, ако със сигурност е върху стената, на която е разположена мишената? Тук, както става ясно за брой на благоприятните, както и за брой на всички възможности не може да говорим, тъй като броят на точките върху стената, както и на тези върху мишената са не само безкраен брой, но са неизброимо много. Тогава възниква въпросът какъв е шансът да попадне в мишената, отнесен към това да попадне в стената, или казано по друг начин какво е отношението на частта да попадне в мишената към частта да попадне върху стената. Логично е да отнесем лицето на кръга към лицето на стената. Тогава търсената вероятност ще бъде:

$$\frac{S_{\text{кръга}}}{S_{\text{стената}}},$$

където с S сме означили съответното лице.

Дадено е, че $r = 0,2 \text{ м} \Rightarrow S_{\text{кръга}} = \pi r^2 = \pi \cdot 0,2^2 = \pi \cdot 0,04 \approx 3,14 \cdot 0,04 = 1,256 \text{ м}^2$, а $S_{\text{стената}} = 2 \times 3 = 6 \text{ м}^2$. Следователно $P(A) = \frac{1,256}{6} \approx 0,21$.

Можем да кажем, че геометричната вероятност се прилага, когато множеството от всички възможности, както и това от благоприятните е неизброимо и вероятността се пресмята като отношение на мерките на двете множества. Това може да бъде направено в общия случай в зависимост от конкретната задача дали е едномерна, двумерна или тримерна. Тогава трите възможности за пресмятане на вероятността са:

1. $P(A) = \frac{\text{дължина на отсечка}}{\text{дължина на отсечка}};$
2. $P(A) = \frac{\text{лице на фигура}}{\text{лице на фигура}};$
3. $P(A) = \frac{\text{обем на тяло}}{\text{обем на тяло}}.$

Именно такъв тип вероятност наричаме геометрична вероятност.

Първо ще разгледаме три основни (типични) задачи, свързани с трите варианта за геометрична вероятност, които бяха вече споменати.

Задача 1: По случаен начин се избира реално число в интервала $[-2, 5]$. Каква е вероятността абсолютната стойност на числото да е ≤ 1 ?

Преди да предложим решението на тази задача ще обърнем внимание на следния факт. Когато имаме неизброимо множество от възможности, то вероятността да се получат краен брой конкретни числа е равна на 0. Наистина,

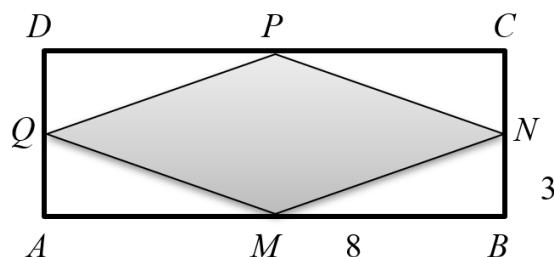
краен брой стойности k , отнесени фактически към безброй много стойности (още повече тяхното множество е дори неизброимо) е $\frac{k}{\infty} \rightarrow 0$ и именно заради това приемаме тази вероятност за равна на 0.

Да се върнем към решаването на задачата. Ако случайното събитие A е „числото по модул е ≤ 1 “, което според току що изясненото е равносилно на „числото по модул е < 1 “, то благоприятни са всички случаи, ако числото е в интервала $[-1, 1]$ или $(-1, 1)$. Дължината на този интервал е 2, а дължината на интервала, в който попадат всички възможности е $5 - (-2) = 7$, то тогава $P(A) = \frac{2}{7}$.

Задача 2: Каква е вероятността, точка взета от вътрешността на правоъгълник $ABCD$ със страни $AB=CD=8\text{cm}$ и $BC=AD=3\text{cm}$, да попадне във вътрешността на четириъгълник, чиито върхове са средите на страните на изходния правоъгълник?

Тук, отново бихме искали да направим някои уточнения. Вероятността на дадено случайно събитие тук се изразява с отношение на лица и вероятността да попаднем по границата е „нула“, тъй като „лицето“ на съвкупност от отсечки (и криви) е равно на 0.

Сега да пристъпим към решаването на задачата (фиг. 1).



Фигура 1

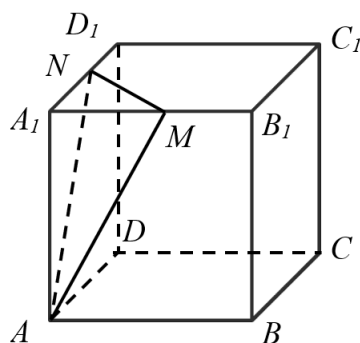
Нека M, N, P, Q са средите съответно на AB, BC, CD, AD . Всички възможности се получават от лицето на $ABCD$, а именно $S_{ABCD} = 8 \cdot 3 = 24\text{cm}^2$, а благоприятните от лицето на $MNPQ$ и S_{MNPQ} лесно се пресмята (това не е обект на настоящото изследване и нека всеки сам да стигне до това), че е $\frac{1}{2} S_{ABCD} = 12\text{cm}^2$ и тогава търсената вероятност е $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

Задача 3: Даден е куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с дължина на ръба 1 см. Построена е равнина през върха A и средите M и N , съответно на ръбовете $A_1 B_1$ и $A_1 D_1$. Ако по случаен начин избираме точка от вътрешността на куба, то каква е вероятността тази точка да е от вътрешността на пирамидата $AMNA_1$?

Тук, надяваме се, че не е необходимо да се правят обяснения, че вероятността дадена точка да попадне в стената е 0.

За да решим задачата използваме обемите на куба и пирамидата.

$V_{\text{куба}} = 1\text{cm}^3$. Да разгледаме сега пирамидата $AMNA_1$ (фиг. 2)



Фигура 2

Можем да я разгледаме с основа A_1MN и връх A . От $AA_1 \perp (A_1MN) \Rightarrow$

$$V_{AMNA_1} = \frac{1 \cdot S_{A_1MN}}{3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{24} \text{ см}^3. \text{ Следователно търсената вероятност е равна на } \frac{\frac{1}{24}}{1} = \frac{1}{24}.$$

От изложените решения на задачи 2 и 3 става ясно, че ако се знае принципът за пресмятане на геометрична вероятност, особено при по-сложни задачи, трудността не идва от гледна точка на пресмятане на съответната вероятност, а от това да бъдат пресметнати съответните лица или обеми.

Сега ще пристъпим към разглеждане на някои по-сложни задачи, свързани с тази проблематика.

Задача 4: Отсечка с дължина един метър е разделена по случаен начин на две части. Каква е вероятността дължината на едната част да е повече от два пъти от дължината на другата част?

Решение: Нека означим дължината на едната част с x , тогава дължината на другата е $1-x$ и $x \in (0,1)$. Естествено, повече от два пъти е дълга по-дългата част. Тогава разглеждаме два случая:

Случай 1: $x \geq 1-x$ (вече уточнихме, че тук равенството няма значение за пресмятане на вероятността), т.е. $2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ (2) и по-голямата част в този случай е този с дължина „ x “. Тогава $x > 2(1-x) \Leftrightarrow 3x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$ и като отчетем (2) като решим системата

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x > \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right). \quad (3)$$

$$\text{Случай 2: } 1-x \geq x \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Тогава, изхождайки от това, че по-голямата част е тази с дължина $1-x$, то следва $1-x \geq 2x \Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$ и като отчетем (4), то в този случай се получава $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$. (5)

Тогава благоприятните случаи са обединението на интервалите от (3) и (5), чиято сумарна дължина е $1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3}$, а всички възможности се определят от дължината на целия интервал $(0, 1)$, която е 1. Окончателно получаваме, че търсената вероятност е $\frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}$.

Един грешен подход при тази задача би бил, ако не се разгледат двата случая, а само единия и тогава би се получила грешна вероятност - $\frac{1}{3}$.

В този смисъл, тук бихме искали да наблегнем на прецизността в условието на задачата. Ще формулираме подобна на последната задача, но малките разлики в условието я правят съществено различна.

Задача 4': Отсечка с дължина 1 м по случаен начин е разделена на две части, които означаваме с дължини x и y . Каква е вероятността $x > 2y$?

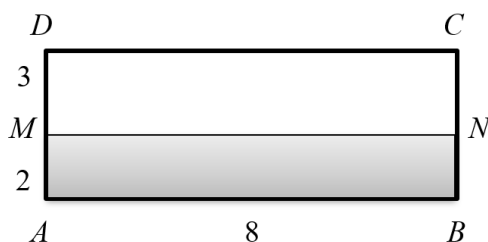
Решение: Тук отново полагаме $y = 1 - x$. За пресмятане на търсената вероятност ще приложим формулата за пълната вероятност, а именно:

$$\begin{aligned} P(x > 2y) &= P(x > y)P(x > 2y/x > y) + P(x < y)P(x > 2y/x < y) = \\ &= P(x > 1-x)P(x > 2-2x/x > 1-x) + P(x < 1-x)P(x > 2-2x/x < 1-x) = \\ &= P\left(x > \frac{1}{2}\right)P\left(x > \frac{2}{3} \middle| x > \frac{1}{2}\right) + P\left(x < \frac{1}{2}\right)P\left(x > \frac{2}{3} \middle| x < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Разликата в отговорите на двете задачи е именно в точността на условието. В първата задача е казано едното (т.е. което и да е), а във втората е конкретизирано, след тяхното означаване, за кое точно става въпрос.

Сега ще разгледаме една задача, чието решение е свързано с друг вид особености.

Задача 5: В правоъгълник с размери 8см×5см (фиг. 3) точките M и N лежат съответно на страните AD и BC , като $MN \parallel AB$ и $AM=2$ см. Ако точка със сигурност е в правоъгълника $ABCD$, то каква е вероятността да е в правоъгълника $ABNM$?



Фигура 3

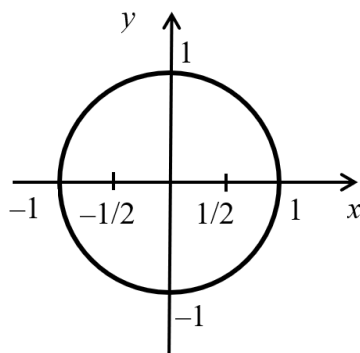
Решение: Всички възможности се описват количествено с лицето на правоъгълника $ABCD$, т.е. $8 \cdot 5 = 40 \text{ см}^2$.

Благоприятните възможности числово може да зададем с лицето на правоъгълника $ABNM$, т.е. $2.8=16 \text{ см}^2$ и тогава търсената вероятност е равна на $\frac{16}{40} = \frac{2}{5} = 0,4$.

Веднага може да забележим, че до това може да достигнем и без да използваме лица, а линейни мерки: двата правоъгълника имат обща страна AB и тогава търсената вероятност е отношението на другите им две страни, т.е. $\frac{2}{5}$.

Дали така можем да разсъждаваме и в следващата задача?

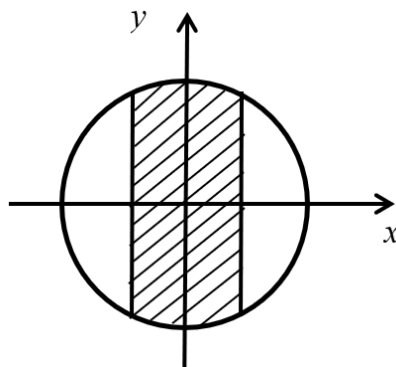
Задача 6: Нека в декартова координатна система е построена окръжност с център т. O и радиус 1. Ако със сигурност избираме точка от вътрешността на кръга с граница построената окръжност, то каква е вероятността нейната абсциса (координата ѝ по оста Ox) да е по модул по-малка от $\frac{1}{2}$ (Фиг. 4)?



Фигура 4

Решение: Един грешен подход би бил, ако се основаваме на предходната задача и изберем линейния (едномерния) метод, т.е. точките по модул по-малки от $\frac{1}{2}$ са точките в интервала $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, чиято дължина е 1, а всички възможни абсциси са в интервала $(-1, 1)$, чиято дължина е 2 и тогава бихме стигнали до отговора $\frac{1}{2}$.

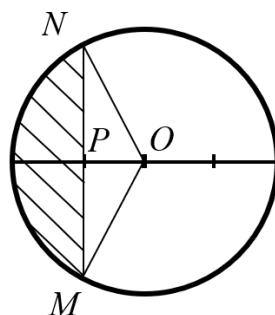
Тук правилното решение се основава като пресметнем лицето на заштрихованата част на фиг. 5 и го отнесем към лицето на кръга.



Фигура 5

Знаменателят в търсената вероятност е лицето на кръга, което пресмятаме лесно: $S_{\text{кръга}} = \pi r^2 = \pi$.

Лицето на заштрихованата част ще намерим като пресметнем лицата на двата сегмента в бяло на фиг. 5 (които са еднакви) и от лицето на целия кръг ги извадим. Ще пресметнем лицето само на единия сегмент и след това ще го удвоим (фиг. 6)



Фигура 6

Нека сегмента е заштрихованата част на фиг. 6. $OP = \frac{1}{2}$, $ON = r = 1 \Rightarrow$

$$\angle ONP = \frac{\pi}{6} (30^\circ) \text{ и } \angle PON = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \angle MON = \frac{2\pi}{3}.$$

$$S_{\text{сегм } MN} = S_{\text{сегм } OMN} - S_{\triangle OMN} = \frac{r^2 2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} - r^2 \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{r^2}{2} \left(\frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1,22837 \approx 0,6142.$$

Тогава търсената вероятност е:

$$\frac{\pi - 2 \cdot 0,6142}{\pi} \approx 0,609, \text{ което е и вярната търсена вероятност.}$$

Разгледаните тук задачи демонстрират някои особености при прилагане на геометрична вероятност и показват значението на всеки един детайл от условието на задачата. Считаме, че анализиранияте теоретични постановки и предложените примери могат да спомогнат за овладяване на някои тънки моменти при решаване на задачи от геометрична вероятност, както от страна на учениците и студентите, така и от страна на техните преподаватели.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Galabova, D., M. Siderova (2021). Matematika za 12. klas. Profilirana podgotovka. Sofia: Vedi.
2. Nikolaev, R., Suruzhon, D., Stoyanov, T., Zapryanova, T., Milkova, T., Miryanov, R. (2021). Prilozhna matematika. Varna: Nauka i iekonomika.
3. Yordanova, V., Mihaylov, D., Petkov, Y. (2021). Prilozhna matematika: Rakovodstvo. Varna: Nauka i iekonomika.

**ФУНДАМЕНТАЛНАТА ПОДГОТОВКА
ВЪВ ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ**

Сборник с доклади
от международна научно-практическа конференция

**THE ROLE OF FUNDAMENTAL PROGRAMS
IN HIGHER EDUCATION**

Conference proceeding

Предпечатна подготовка *Венета Кишева*

Издателски коли 11,6

Издателство „Наука и икономика“
Икономически университет – Варна
ул. „Евлоги Георгиев“ 24
Печатна база на ИУ – Варна

ISSN 2815-3863



**КАТЕДРА „СТАТИСТИКА И
ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА“**

**ФУНДАМЕНТАЛНАТА
ПОДГОТОВКА
ВЪВ ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ**

**Сборник с доклади
от международна научно-практическа
конференция**



**ФУНДАМЕНТАЛНАТА ПОДГОТОВКА ВЪВ ВИСШЕТО
ОБРАЗОВАНИЕ**

**THE ROLE OF FUNDAMENTAL PROGRAMS IN HIGHER
EDUCATION**

Сборник с доклади от международна научно-практическа
конференция

Conference proceeding

**ФУНДАМЕНТАЛНАТА ПОДГОТОВКА ВЪВ ВИСШЕТО
ОБРАЗОВАНИЕ**

Сборник с доклади от
международна научно-практическа конференция,
организирана от катедра „Статистика и приложна математика“
при Икономически университет - Варна

8 ноември 2024 г.

**THE ROLE OF FUNDAMENTAL PROGRAMS IN HIGHER
EDUCATION**

International Scientific-Practical Conference
Organized by department “Statistics and Applied Mathematics”,
University of Economics - Varna

8 November 2024

2024

Издателство „Наука и икономика“
Икономически университет – Варна

Публикуваните доклади не са редактирани и коригирани. Авторите носят пълна отговорност за тяхното съдържание и за грешки, допуснати по тяхна вина. Докладите са проверени за оригиналност.

Тази книга или нейните части не могат да бъдат възпроизвеждани или предавани под каквато и да е форма, или по какъвто и да е начин, електронен или механичен, и копирани без писменото разрешение на издателя.

The published papers have not been edited and corrected. Authors are responsible for the content of their papers and errors committed by their fault. Papers are checked for originality.

This book or its parts may not be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, and copied without the written permission of the publisher.

ISSN 2815-3863

ОРГАНИЗАЦИОНЕН КОМИТЕТ

Председател:

Доц. д-р Танка Милкова – ръководител катедра
„Статистика и приложна математика”

Членове:

Проф. д-р Росен Николаев
Доц. д-р Радан Мирянов
Доц. д-р Теодора Запрянова
Доц. д-р Маргарита Ламбова
Доц. д-р Деян Михайлов
Гл. ас. д-р Йордан Петков
Гл. ас. д-р Велина Йорданова
Гл. ас. д-р Димитрия Карадимова
Гл. ас. д-р Светлана Тодорова
Гл. ас. д-р Любомир Любенов
Гл. ас. д-р Ваня Стоянова
Гл. ас. д-р Славея Желязкова
Тижен Талиб

ORGANIZING COMMITTEE

Chair:

Assoc. Prof. Tanka Milkova, PhD – head of department “Statistics and Applied Mathematics”

Members:

Prof. Rosen Nikolaev, PhD
Assoc. Prof. Radan Miryanov, PhD
Assoc. Prof. Tanka Milkova, PhD
Assoc. Prof. Teodora Zapryanova, PhD
Assoc. Prof. Margarita Lambova, PhD
Assoc. Prof. Deyan Mihaylov, PhD
Chief Assist. Prof. Yordan Petkov, PhD
Chief Assist. Prof. Velina Yordanova, PhD
Chief Assist. Prof. Dimitria Karadimova, PhD
Chief Assist. Prof. Svetlana Todorova, PhD
Chief Assist. Prof. Lyubomir Lyubenov, PhD
Chief Assist. Prof. Vanya Stoyanova, PhD
Chief Assist. Prof. Slaveya Zhelyazkova, PhD
Tizhen Talib

НАУЧЕН СЪВЕТ

Председател:

Проф. д-р Росен Николаев

Членове:

Проф. д-р Веселин Хаджиев

Проф. д-р Владимир Сълов

Проф. д-р Юлиян Василев

Проф. д.н. Сава Гроздев

Проф. д-р Веселин Ненков

Доц. д-р Радан Мирянов

Доц. д-р Танка Милкова

Доц. д-р Маргарита Ламбова

Доц. д-р Теодора Запрянова

Доц. д-р Деян Михайлов

Проф. д.п.н. Мария Шабанова - Москва, Русия

Проф. Алекса Малчески - Скопие, Р.С.М.

Prof. Sasa Popovic - University of Montenegro

Prof. dr. Ajda Fosner - University of Primorska, Slovenia

Prof. Vijay Tandon - Universal Business School, India

Prof. Samo Bobek - University of Maribor, Slovenia

Assoc. Prof. Aleksandra Tošović-Stevanović - Faculty of Business Economics and Entrepreneurship in Belgrade, Serbia

Lect. Bulent Duman - Balikesir University, Turkey

ADVISORY COUNCIL:

Chair:

Prof. Rosen Nikolaev, PhD

Members:

Prof. Veselin Hadzhiev, PhD

Prof. Vladimir Sulov, PhD

Prof. Yulian Vasilev, PhD

Prof. Sava Grozdev, DSc.

Prof. Veselin Nenkov, PhD

Assoc. Prof. Radan Miryanov, PhD

Assoc. Prof. Tanka Milkova, PhD

Assoc. Prof. Margarita Lambova, PhD

Assoc. Prof. Teodora Zapryanova, PhD

Assoc. Prof. Deyan Mihaylov, PhD

Prof. Maria Shabanova, D.Sc. - Moscow, Russia

Prof. Aleksa Malcheski – Skopje, Republic of North Macedonia

Prof. Sasa Popovic - University of Montenegro

Prof. dr. Ajda Fosner - University of Primorska, Slovenia

Prof. Vijay Tandon - Universal Business School, India

Prof. Samo Bobek - University of Maribor, Slovenia

Assoc. Prof. Aleksandra Tošović-Stevanović - Faculty of Business Economics and Entrepreneurship in Belgrade, Serbia

Lect. Bulent Duman - Balikesir University, Turkey

СЪДЪРЖАНИЕ

- 1. Проф. д-р Росен Николаев, доц. д-р Танка Милкова,
доц. д-р Радан Мирянов (Икономически университет – Варна)**
ПРИЛОЖЕНИЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ
МЕТОДИ ЗА КОНСТРУИРАНЕ НА ДВУФАКТОРЕН
ИКОНОМИЧЕСКИ МОДЕЛ 11
- 2. Проф. д-р ик. н. Емил Христов**
МАТЕМАТИЧЕСКИ МЕТОДИ ЗА ЕДНОЗНАЧНИ (НЕУСЛОВНИ)
РЕШЕНИЯ НА АДИТИВНИ ФАКТОРНИ АНАЛИЗИ НА
ПРОМЕНТЕ НА ОБЕМНИ РЕЗУЛТАТИВНИ ВЕЛИЧИНИ
(ПРОДУКЦИИ) С ДВА ФАКТОРА В ИКОНОМИКАТА..... 18
- 3. Проф. д-р Сава Грозев (Пловдивски университет „Паисий
Хилендарски”), проф. д-р Веселин Ненков (Висше
военноморско училище „Н. Й. Вапцаров”), доц. д-р Татяна
Маджарова (Висше военноморско училище „Н. Й. Вапцаров”)**
ОБРАТНА ФУНКЦИЯ И ОБРАТНИ
ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ФУНКЦИИ 38
- 4. Проф. д.п.н., Мария Шабанова (Северный (Арктический)
федеральный институт имени М.В.Ломоносова),
доц., к.п.н., Лариса Удовенко (Московский Педагогический
государственный университет, Православный Свято-
Тихоновский гуманитарный университет)**
МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ПРОБЛЕМЫ
ПРЕЕМСТВЕННОСТИ ШКОЛЬНОГО И ВУЗОВСКОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ 51
- 5. Проф. Александр Ястребов, д.п.н. (Ярославский гос.
педагогический университет им. К.Д. Ушинского)**
ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ИЗУЧЕНИИ НЕЕВКЛИДОВЫХ
ГЕОМЕТРИЙ В ПРОЦЕССЕ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЕЙ 61

6. Александр Луканкин (Российская государственная академия интеллектуальной собственности)	
ОБРАЗОВАНИЕ В XXI ВЕКЕ – ПУТИ РАЗВИТИЯ И РИСКИ.....	70
7. Доц. д-р Маргарита Ламбова (Икономически университет – Варна)	
КОМПЕТЕНТНОСТНИЯТ ОБРАЗОВАТЕЛЕН МОДЕЛ –	
РЕВОЛЮЦИОНЕН СКОК ИЛИ СРУТВАНЕ В БЕЗДНАТА НА	
БЕЗПАМЕТНОТО НЕВЕЖЕСТВО?	73
8. Доц. д-р Михал Стоянов (Икономически университет – Варна)	
ИЗСЛЕДВАНЕ НА ОСИГУРЕНОСТТА С ТЪРГОВСКА МРЕЖА ОТ	
ОБЕКТИ ЗА ПРОДАЖБА НА ДРЕБНО НА ГОРИВА В БЪЛГАРИЯ	82
9. Доц. д-р Деян Михайлов (Икономически университет – Варна)	
ИЗПОЛЗВАНЕ НА АФИННИ ТРАНСФОРМАЦИИ В СРЕДАТА	
НА MS EXCEL ЗА ПОВИШАВАНЕ НА МОТИВАЦИЯТА ЗА	
ИЗУЧАВАНЕ НА ЕЛЕМЕНТИ ОТ ЛИНЕЙНАТА АЛГЕБРА.....	90
10. Гл. ас. д-р Йордан Петков, доц. д-р Радан Мирянов	
(Икономически университет – Варна)	
ЕДНА ПРАКТИЧЕСКА ЗАДАЧА ПО АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ.....	97
11. Гл. ас. д-р Силвия Господинова (Икономически	
университет – Варна)	
ПРЕДИМСТВА И НЕДОСТАТЪЦИ НА БЕТА И СИГМА	
КОНВЕРГЕНТНИЯ АНАЛИЗ ПРИ ИЗСЛЕДВАНЕ НА	
СТРУКТУРНАТА КОНВЕРГЕНЦИЯ НА ИКОНОМИКИТЕ	106
12. Гл. ас. д-р Ваня Стоянова (Икономически университет – Варна)	
„ЗАГУБЕНОТО ПОКОЛЕНИЕ“ В БЪЛГАРИЯ –	
ИЗМЕНЕНИЕ И ПРОГНОЗА.....	114
13. Гл. ас. д-р Любомир Любенов (Икономически университет – Варна)	
ЦЕНАТА НА ПЕТРОЛА И ВЪНШНАТА ТЪРГОВИЯ НА	
БЪЛГАРИЯ В КОНТЕКСТА НА ФУНДАМЕНТАЛНИТЕ	
ИКОНОМИЧЕСКИ ИЗСЛЕДВАНИЯ	119

14. Гл. ас. д-р Светлана Тодорова (Икономически университет – Варна), Гл. ас. д-р Весела Димитрова (Университет за национално и световно стопанство – София)	
BIG DATA В ОБУЧЕНИЕТО ПО СТАТИСТИКА.....	126
15. Гл. ас. д-р Славей Желязкова (Икономически университет – Варна)	
ПРИЛОЖЕНИЕ НА ДИНАМИЧНОТО ВРЕМЕВО	
ИЗКРИВЯВАНЕ ЗА АНАЛИЗ НА СХОДСТВОТО	
ВЪВ ФОРМАТА НА ВРЕМЕВИ РЕДОВЕ	133
16. Гл. ас. д-р Велина Йорданова, Гл. ас. д-р Димитрия Карадимова (Икономически университет – Варна)	
СЪВРЕМЕННИ ПЕРСПЕКТИВИ, ВЪЗМОЖНОСТИ И	
ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА НА ДИСТАНЦИОННОТО	
ОБУЧЕНИЕ ВЪВ ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ	146
17. Гл. ас. д-р Маня Манева (Тракийски университет, Стара загора)	
ОТ ТЕОРЕТИЧНИ ЗНАНИЯ ДО ПРАКТИЧЕСКО ПРИЛОЖЕНИЕ:	
ФИНАНСОВАТА ГРАМОТНОСТ В БЪЛГАРСКОТО УЧИЛИЩЕ	151
18. Ас. д-р инж. Жулиета Михайлова (Технически университет – Варна)	
ВЪЗМОЖНОСТИ ЗА ПРИЛАГАНЕ НА МОДЕЛА	
НА МАТЕМАТИЧЕСКОТО ОПТИМИРАНЕ В	
РАЗЛИЧНИТЕ СЕКТОРИ НА ИКОНОМИКАТА	161
19. Ас. д-р инж. Жулиета Михайлова (Технически университет – Варна)	
СЪЗДАВАНЕ НА ЛИНЕЙНИ МОДЕЛИ НА ИКОНОМИЧЕСКИ	
ПРОЦЕСИ: МОДЕЛИРАНЕ НА РАЗХОДА НА ГОРИВО	167
20. Докт. Имрел Низам (Икономически университет – Варна)	
МЕТОДИ ЗА ОЦЕНКА НА РИСКА НА ИНВЕСТИЦИОНЕН	
ПРОЕКТ ЗА ИЗГРАЖДАНЕ НА ФОТОВОЛТАИЧНА СИСТЕМА.....	172

CONTENT

1. Prof. Rosen Nikolaev, PhD, Assoc. Prof. Tanka Milkova, PhD, Assoc. Prof. Radan Miryanov, PhD (Varna University of Economics)	
APPLICATION OF MATHEMATICAL METHODS FOR CONSTRUCTING A TWO-FACTOR ECONOMIC MODEL.....	11
2. Prof. Emil Hristov, DSc	
MATHEMATICAL METHODS FOR UNIQUE (UNCONDITIONAL) SOLUTIONS OF ADDITIVE FACTOR ANALYSIS OF CHANGES OF VOLUME OUTPUT VALUES (PRODUCT) WITH TWO FACTORS IN ECONOMY	18
3. Prof. Sava Grozdev, DSc (Paisii Hilendarski University of Plovdiv), Prof. Veselin Nenkov, PhD, (Nikola Vaptsarov Naval Academy), Assoc. Prof. Tatyana Madzharova, PhD (Nikola Vaptsarov Naval Academy)	
INVERSE FUNCTION AND INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS .	38
4. Full Prof. Maria Shabanova, DrSci (Northern (Arctic) Federal University named after M.V.Lomonosov), Assoc. Prof. Larisa Udovenko, PhD (Moscow Pedagogical State University, Private educational institution of higher education Saint Tikhon's Orthodox University for the Humanities)	
METHODOLOGICAL ASPECT OF THE PROBLEM OF CONTINUITY OF SCHOOL AND UNIVERSITY MATHEMATICAL EDUCATION	51
5. Full Prof. Alexander Yastrebov, DrSci (Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D.Ushinski)	
ON EXPERIMENTAL STUDY OF NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES WITHIN TRAINING TEACHERS	61

6. Alexander Lukankin (Russian State Academy of Intellectual Property)	
EDUCATION IN THE 21ST CENTURY –	
DEVELOPMENT PATHS AND RISKS.....	70
7. Assoc. Prof. Margarita Lambova, PhD (University of Economics – Varna)	
THE COMPETENCE EDUCATIONAL MODEL -	
A REVOLUTIONARY LEAP OR A CRASH INTO THE	
ABYSS OF MEMORYLESS IGNORANCE?	73
8. Assoc. Prof. Michal Stojanov, PhD (University of Economics – Varna)	
STUDY ON THE AVAILABILITY OF A COMMERCIAL	
NETWORK OF RETAIL FUEL OUTLETS IN BULGARIA.....	82
9. Assoc. Prof. Deyan Mihaylov, PhD (University of Economics – Varna)	
USING AFFINE TRANSFORMATIONS IN MS EXCEL TO IMPROVE	
MOTIVATION TO LEARN ELEMENTS OF LINEAR ALGEBRA.....	90
10. Chief Assist. Prof. Yordan Petkov, PhD, Assoc. Prof.	
Radan Miryanov, PhD (University of Economics – Varna)	
A PRACTICAL PROBLEM IN ANALYTIC GEOMETRY	97
11. Chief Assist. Prof. Silvia Gospodinova, PhD (University of Economics –	
Varna)	
ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF BETA AND SIGMA	
CONVERGENCE ANALYSIS IN THE STUDY OF STRUCTURAL	
CONVERGENCE OF ECONOMIES.....	106
12. Chief Assist. Prof. Vanya Stoyanova, PhD	
(University of Economics – Varna)	
“LOST GENERATION” IN BULGARIA –	
DEVELOPMENT AND FORECAST	114
13. Chief Assist. Prof. Lyubomir Lyubenow, PhD	
(University of Economics – Varna)	
THE OIL PRICE AND THE EXTERNAL BULGARIA'S TRADE	
IN THE CONTEXT OF FUNDAMENTAL ECONOMIC RESEARCH	119

14. Chief Assist. Prof. Svetlana Todorova, PhD (University of Economics – Varna), Chief Assist. Prof. Vesela Dimitrova, PhD (University of National and World Economy)	
BIG DATA IN STATISTICS TEACHING	126
15. Chief Assist. Prof. Slaveya Zhelyazkova, PhD (University of Economics – Varna)	
APPLYING DYNAMIC TIME WARPING TO ANALYZE	
SHAPE SIMILARITIES IN TIME SERIES DATA	133
16. Chief Assist. Prof. Velina Yordanova, PhD, Chief Assist. Prof. Dimitriya Karadimova (University of Economics – Varna)	
CONTEMPORARY PERSPECTIVES, OPPORTUNITIES AND	
CHALLENGES OF DISTANCE LEARNING IN HIGHER EDUCATION	146
17. Chief Assistant dr. Manya Maneva (Trakia University, Ztara Zagora)	
FROM THEORETICAL KNOWLEDGE TO	
PRACTICAL APPLICATION: FINANCIAL	
LITERACY IN THE BULGARIAN SCHOOL	151
18. Assist. eng. Julieta Mihaylova, PhD (Technical University - Varna)	
APPLICATION OF THE MATHEMATICAL OPTIMIZATION	
MODEL IN THE VARIOUS SECTORS OF THE ECONOMY	161
19. Assist. eng. Julieta Mihaylova, PhD (Technical University - Varna)	
CREATING LINEAR MODELS OF ECONOMIC PROCESSES:	
MODELLING FUEL CONSUMPTION	167
20. Imrel Nizam, PhD student (University of Economics – Varna)	
METHODS FOR ASSESSING THE RISK OF AN INVESTMENT	
PROJECT BUILT ON A PHOTOVOLTAIC SYSTEM.....	172

APPLICATION OF MATHEMATICAL METHODS FOR CONSTRUCTING A TWO-FACTOR ECONOMIC MODEL

Prof. Rosen Nikolaev, PhD
Varna University of Economics, Bulgaria

Assoc. Prof. Tanka Milkova, PhD
Varna University of Economics, Bulgaria

Assoc. Prof. Radan Miryanov, PhD
Varna University of Economics, Bulgaria

Abstract: *In the field of economic science and its manifestations, there is almost no creation of scientific knowledge without the participation of fundamental knowledge in mathematics. A number of branches of mathematics such as linear algebra, analytical geometry, financial mathematics, differential and integral calculus, probability theory, statistics, game theory, mass service theory, stock theory, risk theory and many others are widely used. The aim of this paper is to investigate a two-factor model by applying knowledge of differential calculus of two variables and the method of least squares.*

Keywords: *Mathematical methods; Two-factor economic model.*

JEL code: C65

ПРИЛОЖЕНИЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ МЕТОДИ ЗА КОНСТРУИРАНЕ НА ДВУФАКТОРЕН ИКОНОМИЧЕСКИ МОДЕЛ

Проф. д-р Росен Николаев
Икономически университет – Варна, България

Доц. д-р Танка Милкова
Икономически университет – Варна, България

Доц. д-р Радан Мирянов
Икономически университет – Варна, България

В областта на икономическата наука и нейните проявления почти няма създаване на научно знание без участие на фундаментални знания по математика. Широко приложение намират редица дялове от математиката като линейна алгебра, аналитична геометрия, финансова математика, диференциално и интегрално смятане, теория на вероятностите, статистика, теория на игрите, теория на масовото обслужване, теория на запасите, теория на риска и редица други (Николаев и др., 2021).

Целта в настоящия доклад е да се изследва един двуфакторен модел чрез прилагане на знания по диференциално смятане на две променливи и метода на най-малките квадрати (МНК).

Количествата на продажбите от дадена стока зависят от много фактори: цената, цените на същата стока у конкурентите, инфлацията, реклама и маркетинг, качество на стоката и др. В условията на дуопол продажбите на даден продукт на

двама конкуренти, владеещи пазара зависят както от качеството на всеки от тях, така и от динамиката на цените, които определят.

В доклада първо ще бъде разгледан един пример, в който са зададени количествата на продажбите на двете конкурентни стоки А и В като функции на техните цени предлагани на пазара от един и същи търговец. Ще се има предвид, че двете стоки са взаимнозаменяеми и сходни.

Нека $Q_A = -5p_A + 3p_B + 3,4$ и $Q_B = 3p_A - 4p_B + 2,3$, където Q_A и Q_B са количествата продадени стоки от двата вида, а p_A и p_B са техните цени. Общият приход от продажбите и на двете стоки е $Q_A \cdot p_A + Q_B \cdot p_B = f(p_A, p_B)$, т.е.

$$f(p_A, p_B) = -5p_A^2 + 3p_A p_B + 3,4p_A + 3p_A p_B - 4p_B^2 + 2,3p_B,$$

или

$$f(p_A, p_B) = -5p_A^2 - 4p_B^2 + 6p_A p_B + 3,4p_A + 2,3p_B.$$

Целта на търговеца е да максимизира общия си приход, т.е. да установи при какви цени p_A и p_B , $f(p_A, p_B)$ ще има максимална стойност.

Това е една задача от екстремум на функция на две променливи, което е предмет на диференциалното смятане на повече от една променливи. Това изисква знания по този дял от математиката, които се предлагат във фундамента от плана на обучение на студентите икономисти. Тук няма да се представя теорията от съответната методика, а ще се предложи директно самото решение.

1. Частните производни от първи и втори ред на $f(p_A, p_B)$ спрямо всяка от променливите са:

$$f'_{p_A}(p_A, p_B) = -10p_A + 6p_B + 3,4$$

$$f'_{p_B}(p_A, p_B) = -8p_B + 6p_A + 2,3$$

$$f''_{p_A p_A}(p_A, p_B) = -10$$

$$f''_{p_A p_B}(p_A, p_B) = f''_{p_B p_A}(p_A, p_B) = 6$$

$$f''_{p_B p_B}(p_A, p_B) = -8.$$

Тъй като $f''_{p_A p_A} \cdot f''_{p_B p_B} - (f''_{p_A p_B})^2 = (-10)(-8) - 6^2 = 44 > 0$, то $f(p_A, p_B)$ ще има екстремум и тъй като $f''_{p_A p_A}(p_A, p_B) = -10 < 0$, то този екстремум е максимум. Този максимум се достига в двойката (p_A, p_B) , която е решение на системата като f'_{p_A} и f'_{p_B} се приравняват на нула, т.е.

$$\begin{cases} -10p_A + 6p_B + 3,4 = 0 \\ 6p_A - 8p_B + 2,3 = 0 \end{cases}$$

Тук са необходими знания за решаването на такива системи, които също се предлагат във фундамента. Системата е еквивалентна на

$$\begin{cases} -p_A + 0,6p_B = -3,4 \\ 6p_A - 8p_B = -2,3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \cdot 6 \\ \cdot 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -6p_A + 3,6p_B = -20,4 \\ 6p_A - 8p_B = -2,3 \end{cases}$$

или $p_B = \frac{4,34}{4,4} = 0,99$ и $p_A = 0,6 \cdot 0,99 + 0,34 = 0,93$.

Следователно при цена $p_A = 0,93$ лв. и $p_B = 0,99$ лв. приходът от продажбите им ще е максимален, т.е.

$$\begin{aligned}\max f(p_A, p_B) &= f(0,93;0,99) = \\ &= -5,0,93^2 - 4,0,99^2 + 6,0,93 \cdot 0,99 + 3,4 \cdot 0,93 + 2,3 \cdot 0,99 = 2,718.\end{aligned}$$

Има една особеност, че с това решението на задачата не е приключило. Този екстремум е локален, т.е. ако p_A и p_B могат да приемат произволни реални стойности.

От една страна Q_A и Q_B трябва да бъдат неотрицателни, а от друга, нормално е да бъдат зададени минимални цени на двата вида стоки, т.е. допустимата област на точките (p_A, p_B) се формира от системата

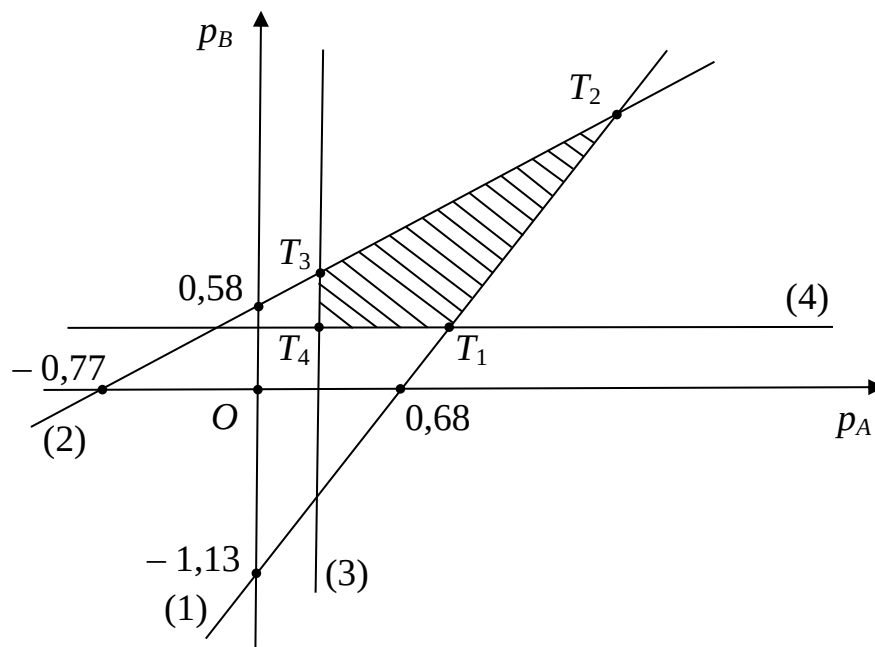
$$D: \begin{cases} Q_A \geq 0 \\ Q_B \geq 0 \\ p_A \geq p_A^* \\ p_B \geq p_B^* \end{cases}$$

където p_A^* и p_B^* са минимално допустимите цени на стоките А и В.

Нека в нашия случай $p_A^* = p_B^* = 0,50$ лв. Тогава

$$D: \begin{cases} -5p_A + 3p_B + 3,4 \geq 0 & (1) \\ 3p_A - 4p_B + 2,2 \geq 0 & (2) \\ p_A \geq 0,5 & (3) \\ p_B \geq 0,5 & (4) \end{cases}$$

Имайки предвид, че тези неравенства като уравнения са прави линии в равнината, а като неравенства са точки от дадена полуравнина, то графично D е изобразена на фиг. 1 (защрихованата част).



Фигура 1. Графично представяне на множеството D
Източник: разработка на авторите

Върховете на допустимата област са T_1, T_2, T_3, T_4 съответно с координати:

$$T_1(0,98;0,5), T_2(1,86;1,97), T_3(0,5;0,95), T_4(0,5;0,5).$$

Точката $(0,93;0,99)$, в която е локалният екстремум попада в допустимата област, която е затворено ограничено множество. Тъй като имаме единствен локален екстремум в затворено ограничено множество, то той се явява и глобален. На тази база вече можем да твърдим, че най-голямата стойност на общия приход е 2,718 и се постига в точката $(p_A, p_B) = (0,93;0,99)$.

Във втората част на доклада, ще разгледаме как на практика се получават функциите Q_A и Q_B .

Нека в исторически аспект са известни p_A, p_B, Q_A, Q_B (табл.1).

Таблица 1

Исторически данни за p_A, p_B, Q_A, Q_B

№	p_A	p_B	$\hat{Q}_A$	$\hat{Q}_B$
1	p_{A1}	p_{B1}	$\hat{Q}_{A1}$	$\hat{Q}_{B1}$
2	p_{A2}	p_{B2}	$\hat{Q}_{A2}$	$\hat{Q}_{B2}$
...	...	...	...	...
n	p_{An}	p_{Bn}	$\hat{Q}_{An}$	$\hat{Q}_{Bn}$

Източник: разработка на авторите

Нека например търсим зависимостта на Q_A от p_A и p_B (аналогично е за Q_B) във вида $Q_A = ap_A + bp_B + c$. За намиране на коефициентите a, b и c ще използваме принципа на метода на най-малките квадрати.

Отклоненията на търсения модел от реалните данни в таблицата са

$$Q_{Ai} - \hat{Q}_{Ai} = \delta_i, \quad i = 1 \div n.$$

$$\delta_i = ap_{Ai} + bp_{Bi} + c - \hat{Q}_{Ai}, \quad i = 1 \div n$$

и целта е

$$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \rightarrow \min,$$

т.е.

$$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (ap_{Ai} + bp_{Bi} + c - \hat{Q}_{Ai})^2 \rightarrow \min.$$

За тази цел се търси решението на системата:

$$\left| \begin{array}{l} f'_a = 2 \sum_{i=1}^n (ap_{Ai} + bp_{Bi} + c - \hat{Q}_{Ai}) \cdot p_{Ai} = 0 \\ f'_b = 2 \sum_{i=1}^n (ap_{Ai} + bp_{Bi} + c - \hat{Q}_{Ai}) \cdot p_{Bi} = 0 \\ f'_c = 2 \sum_{i=1}^n (ap_{Ai} + bp_{Bi} + c - \hat{Q}_{Ai}) = 0. \end{array} \right.$$

Така достигаме до системата:

$$\begin{cases}
\left(\sum_{i=1}^n p_{Ai}^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^n p_{Ai}p_{Bi}\right)b + \left(\sum_{i=1}^n p_{Ai}\right)c = \sum_{i=1}^n p_{Ai}\hat{Q}_{Ai} \\
\left(\sum_{i=1}^n p_{Ai}p_{Bi}\right)a + \left(\sum_{i=1}^n p_{Bi}^2\right)b + \left(\sum_{i=1}^n p_{Bi}\right)c = \sum_{i=1}^n p_{Bi}\hat{Q}_{Ai} \\
\left(\sum_{i=1}^n p_{Ai}\right)a + \left(\sum_{i=1}^n p_{Bi}\right)b + nc = \sum_{i=1}^n \hat{Q}_{Ai}.
\end{cases} \quad (3)$$

Приложението на изведения модел ще демонстрираме чрез следните примерни данни за цени и количества p_A , p_B , $\hat{Q}_A$, $\hat{Q}_B$ за дванадесет периода (табл.2).

Таблица 2

Примерни данни за p_A , p_B , $\hat{Q}_A$, $\hat{Q}_B$

№	p_A	p_B	$\hat{Q}_A$	$\hat{Q}_B$
1	1,2	1,05	2,03	1,62
2	1,28	1,05	1,84	1,74
3	1,35	1,1	1,96	1,65
4	1,32	1,12	2,01	1,58
5	1,37	1,08	1,74	1,77
6	1,37	1,1	1,78	1,7
7	1,33	1,12	1,97	1,55
8	1,35	1,12	1,99	1,58
9	1,4	1,15	1,9	1,56
10	1,43	1,15	1,87	1,63
11	1,43	1,13	1,85	1,65
12	1,45	1,18	1,92	1,64

Източник: разработка на авторите

За да решим система (3) и да изведем търсения модел правим предварителни изчисления, които са представени в табл. 3.

Таблица 3

Примерни данни за p_A , p_B , $\hat{Q}_A$, $\hat{Q}_B$ и предварителни изчисления за конструиране на модела

№	p_A	p_B	$\hat{Q}_A$	$\hat{Q}_B$	p_A^2	p_B^2	$p_A p_B$	$p_A \hat{Q}_A$	$p_A \hat{Q}_B$	$p_B \hat{Q}_A$	$p_B \hat{Q}_B$
1	1,2	1,05	2,03	1,62	1,44	1,1025	1,26	2,436	1,944	2,1315	1,701
2	1,28	1,05	1,84	1,74	1,6384	1,1025	1,344	2,3552	2,2272	1,932	1,827
3	1,35	1,1	1,96	1,65	1,8225	1,21	1,485	2,646	2,2275	2,156	1,815
4	1,32	1,12	2,01	1,58	1,7424	1,2544	1,4784	2,6532	2,0856	2,2512	1,7696
5	1,37	1,08	1,74	1,77	1,8769	1,1664	1,4796	2,3838	2,4249	1,8792	1,9116
6	1,37	1,1	1,78	1,7	1,8769	1,21	1,507	2,4386	2,329	1,958	1,87
7	1,33	1,12	1,97	1,55	1,7689	1,2544	1,4896	2,6201	2,0615	2,2064	1,736
8	1,35	1,12	1,99	1,58	1,8225	1,2544	1,512	2,6865	2,133	2,2288	1,7696

9	1,4	1,15	1,9	1,56	1,96	1,3225	1,61	2,66	2,184	2,185	1,794
10	1,43	1,15	1,87	1,63	2,0449	1,3225	1,6445	2,6741	2,3309	2,1505	1,8745
11	1,43	1,13	1,85	1,65	2,0449	1,2769	1,6159	2,6455	2,3595	2,0905	1,8645
12	1,45	1,18	1,92	1,64	2,1025	1,3924	1,711	2,784	2,378	2,2656	1,9352
Σ	16,28	13,35	22,86	19,67	22,1408	14,8689	18,137	30,983	26,6851	25,4347	21,868

Източник: разработка на авторите

При така направените изчисления система (3) за Q_A приема вида:

$$\begin{cases} 22,1408.a + 18,137.b + 16,28.c = 30,983 \\ 18,137.a + 14,8689.b + 13,35.c = 25,4347 \\ 16,28.a + 13,35.b + 12.c = 22,86 \end{cases}$$

За решаване на системата е използван онлайн продукт (<https://matrixcalc.org/bg/slu.html>) и резултатът е следният:

$$\begin{aligned} a &= -2,17, \\ b &= 3,42, \\ c &= 1,04. \end{aligned}$$

Следователно търсеният модел, който отразява зависимостта на количеството Q_A от цените p_A и p_B приема вида:

$$Q_A = -2,17p_A + 3,42p_B + 1,04.$$

Системата (3) за функцията $Q_B = d.p_B + l.p_A + k$ има вида:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n p_{Bi}^2 \right) d + \left(\sum_{i=1}^n p_{Ai} p_{Bi} \right) l + \left(\sum_{i=1}^n p_{Bi} \right) k = \sum_{i=1}^n p_{Bi} \hat{Q}_{Bi} \\ \left(\sum_{i=1}^n p_{Ai} p_{Bi} \right) d + \left(\sum_{i=1}^n p_{Ai}^2 \right) l + \left(\sum_{i=1}^n p_{Ai} \right) k = \sum_{i=1}^n p_{Ai} \hat{Q}_{Bi} \\ \left(\sum_{i=1}^n p_{Bi} \right) d + \left(\sum_{i=1}^n p_{Ai} \right) l + nk = \sum_{i=1}^n \hat{Q}_{Bi}. \end{cases} \quad (3')$$

или за конкретната задача:

$$\begin{cases} 14,8689.d + 18,137.l + 13,35.k = 21,868 \\ 18,137.d + 22,1408.l + 16,28.k = 26,6851 \\ 13,35.d + 16,28.l + 12.k = 19,67 \end{cases}$$

За решаване на системата отново е използван онлайн продукт (<https://matrixcalc.org/bg/slu.html>) и резултатът е:

$$\begin{aligned} d &= -2,9, \\ l &= 1,35, \\ k &= 3,03, \end{aligned}$$

и търсеният модел, който отразява зависимостта на количеството Q_B от цените p_A и p_B приема вида:

$$Q_B = -2,9p_B + 1,35p_A + 3,03.$$

Така се получават функциите на продажбите на двата вида стоки, които в началото въведохме фиктивно.

Като следваме подхода в предната задача, то за функцията на общия приход получаваме:

$$\begin{aligned} f(p_A, p_B) &= p_A \cdot Q_A + p_B \cdot Q_B = \\ &= -2,17 p_A^2 + 3,42 p_A p_B + 1,04 p_A - \\ &- 2,9 p_B^2 + 1,35 p_A p_B + 3,03 p_B = \\ &= -2,17 p_A^2 - 2,9 p_B^2 + 4,77 p_A p_B + 1,04 p_A + 3,03 p_B. \end{aligned}$$

Съответните частни производни са:

$$\begin{aligned} f'_{p_A}(p_A, p_B) &= -4,34 p_A + 4,77 p_B + 1,04, \\ f'_{p_B}(p_A, p_B) &= -5,8 p_B + 4,77 p_A + 3,03, \\ f''_{p_A p_A}(p_A, p_B) &= -4,34, \quad f''_{p_B p_B}(p_A, p_B) = -5,8, \quad f''_{p_A p_B}(p_A, p_B) = 4,77. \\ f''_{p_A p_A}(p_A, p_B) \cdot f''_{p_B p_B}(p_A, p_B) - (f''_{p_A p_B}(p_A, p_B))^2 &= \\ &= (-4,34) \cdot (-5,8) - (4,77)^2 = 2,419 > 0. \end{aligned}$$

Следователно функцията има екстремум, който е максимум, тъй като $f''_{p_A p_A}(p_A, p_B) = -4,34 < 0$.

Тъй като се използва същата процедура като в предходната задача, то оставяме на читателите, първо, сами да определят при кои цени на двата продукта се получава този екстремум и каква е неговата стойност. Второ, ако минималните цени са $p_A^* = 8,00$ лв. и $p_B^* = 7,00$ лв., да се начертае допустимата област и да се провери дали точката на локалния екстремум попада в нея и ако не попада, то какво следва да се извърши по-нататък.

Като заключение можем да направим извода, че в редица икономически задачи се налага прилагането на различен математически апарат, който се преподава при фундаменталната подготовка във висшите икономически училища. Неговото познаване, овладяване и използване е предпоставка за израстването на добри специалисти.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Nikolaev, R., D. Suruzhon, T. Stoyanov, T. Zapryanova, T. Milkova, R. Miryanov (2021). *Prilozhna matematika*. Varna: Nauka i ikonomika, ISBN 978-954-21-1060-6.
2. <https://matrixcalc.org/bg/slu.html> (accessed on 29.10.2024)

MATHEMATICAL METHODS FOR UNIQUE (UNCONDITIONAL) SOLUTIONS OF ADDITIVE FACTOR ANALYSIS OF CHANGES OF VOLUME OUTPUT VALUES (PRODUCT) WITH TWO FACTORS IN ECONOMY

Prof. Emil Hristov, DSc

Abstract: The one-valued (unconditional) solutions of additive factor quantities with two factors in the economy are presented. The elementary factor dependence of the production of an individual commodity with the product of two factors was used, where is the price of the commodity (intensive factor), is its natural quantity (extensive factor). For the solution of the additive factor analysis, a simple geometric method is proposed with two rectangles, the areas of which represent the volumes and production of the commodity. The bases of the two rectangles represent the values of the extensive factor and , and the heights of the rectangles represent the values of the intensive factor from the base and reporting periods. True and accurate effects are obtained by multiplying each factor change (the difference between the factor's reporting and base value) by the lesser of the other factor's value from the base or reporting period. The smaller values are determined simply and easily with the suggested elementary but strict mathematical criteria, which are the inequalities between the reported and the base value of each factor. The single-valued solution and elementary mathematical criteria are summarized by the discrete odd function of the mathematical signum. With it, all additive factor analyzes from all areas of life are solved unequivocally.

Keywords: Mathematical methods; Factor analysis

JEL code: C1

МАТЕМАТИЧЕСКИ МЕТОДИ ЗА ЕДНОЗНАЧНИ (НЕУСЛОВНИ) РЕШЕНИЯ НА АДИТИВНИ ФАКТОРНИ АНАЛИЗИ НА ПРОМЕНИТЕ НА ОБЕМНИ РЕЗУЛТАТИВНИ ВЕЛИЧИНИ (ПРОДУКЦИИ) С ДВА ФАКТОРА В ИКОНОМИКАТА

Проф. д-р ик. н. Емил Христов

*Посвещавам на математиците от
“Икономически университет – Варна”,
които разбират дискретния факторен анализ.*

Въведение

Адитивните факторни анализи (АФА) са първите и най-прости, но и най-необходими статистически факторни анализи за всички икономисти. С тях се разпределя **разликата** между две обемни резултативни величини (продукции), например в динамика от отчетен период (година) и базисен период (година), на части или **ефекти** според промените на две или повече, факторни величини.

За разлика от непрекъснатите величини в математиката, стойностите на променливите от двата периода (години) са **дискретни** (разделени или прекъснати във времето) величини. Обемни резултативни величини могат да бъдат продукции на страната, на отделен отрасъл, подотрасъл или фирма, на съвкупност от стоки и дори продукция само на една отделна стока. В друг, териториален разрез обемни

результативни величини (продукции) могат да бъдат на друга страна, район, област, община, град и на друго териториално или административно подразделение. Дискретни са променливите и по икономически признаци, например по сектори на икономиката, отрасли, подотрасли и други.

Дискретните адитивни факторни анализи са **единични**, ако са с два фактора, всеки от които подобно на обемната резултативна величина се характеризира само с една стойност за отчетния период (година) и само с една стойност за базисния период (година). Използва се определението **единични по аналогия с единичните индексни факторни анализи**, които използват единични факторни индекси. Ако обемната резултативна величина и двата фактора се характеризират с две или повече стойности за отчетния и базисния период, дискретните адитивни и индексни факторни анализи са **множествени**. За еднозначните (единствени) неусловни решения на единичните адитивни факторни анализи в икономиката предлагам **нов метод**, който изведох с помощта на теорията на вероятностите в демографската статистика за т.нар. **напречен демографски факторен анализ** на броя на умрелите по възраст и година на раждане. Използвана е **концепцията за интензивните и екстензивните фактори**, която произлиза от определението на **основното понятие и показател „вероятност за умиране q_x “ в теорията на вероятностите** (Сугарев, 1975). След това по аналогия с концепцията за интензивните и екстензивните фактори пренесох метода от демографската в икономическата статистика също за еднозначни (неусловни) решения на промените на обемни резултативни величини (продукции) в икономиката. Тъй като много от читателите икономисти може да не познават демографските факторни анализи и теорията на вероятностите, методът не е пренесен формално от демографската статистика в икономическата, а е изведен отново за нуждите на такива читатели икономисти.

Най-простият единичен адитивен факторен анализ с два фактора в икономиката е според **дискретната единична мултипликативна зависимост или функция $P = p \cdot q$** . В тази формула, P е **обемът** на общата продукция, например на една стока, p е **цената** на стоката (интензивен фактор), q е **натуралното количество** на стоката (екстензивен фактор). Единичният адитивен факторен анализ се извършва на **разликата** (прирастът или намалението) на общата продукция на стоката от отчетен период (година) $P_1 = p_1 \cdot q_1$ и базисен период (година) $P_0 = p_0 \cdot q_0$, или $\Delta P = P_1 - P_0 = p_1 \cdot q_1 - p_0 \cdot q_0$.

Такова е решението на адитивния факторен анализ на разликата ΔP , която се представя като **сума на ефекти** (прираст или намаление) на всеки фактор: на цената $\Delta p = (p_1 - p_0)$ и на натуралното количество на стоката $\Delta q = (q_1 - q_0)$. Всеки ефект се получава като **произведение** на всяка факторна промяна с **по-малката стойност на другия фактор** от базисната или от отчетната година. За улеснение на читателя, тази по-малка стойност се определя много лесно с въведени **елементарни математически критерии** (неравенствата между отчетната и базисната стойност на всеки фактор). С тези елементарни математически критерии всяка задача на АФА е **точно определена математическа задача** с едно единствено **еднозначно** (неусловно) решение.

Като нов метод за еднозначни решения, той се различава от различните подходи, концепции и методи за решения на адитивните факторни анализи във висшето икономическо образование по статистика и в научно-приложните

икономико-статистически изследвания извън образованието. Докладът е предназначен преди всичко за икономисти, но той не включва проблемите на инфлацията и методите за нейното измерване. Те са специални и изискват отделно обсъждане. Моето мнение е че независимо от нейното изключване, всички анализи трябва да бъдат извършвани и при наличие на инфлация, за да се оценява нейното влияние.

Другият много по-сложен и труден дискретен факторен анализ е индексният (ИФА). Неговото **принципно различие** с адитивния факторен анализ (АФА) е, че докато АФА започва с **разликите** между отчетните и базисните стойности на трите дискретни показателя, $\Delta P = P_1 - P_0$ на продукцията, $\Delta p = p_1 - p_0$ на цената и $\Delta q = (q_1 - q_0)$ на натуралното количество на стоката, ИФА започва със същите

показатели, но с техните **темпове** или отношения $\frac{P_1}{P_0}$, $\frac{p_1}{p_0}$ и $\frac{q_1}{q_0}$. Следователно

АФА и ИФА са **две форми** на един и същ дискретен факторен анализ. Решението на ИФА се основава на една много стара идея на покойния акад. Иван Стефанов – виден български икономист – финансист и статистик, за **адитивно решение на ИФА** (Стефанов и Тотев, 1960). По тази причина в настоящия доклад се представят **най-напред** еднозначните решения на АФА с примери според елементарните математически критерии при **едновременните промени** на двата фактора, $P_1 > P_0$ или $P_1 < P_0$ и $q_1 > q_0$ или $q_1 < q_0$. След това като се използват крайните резултати от АФА ще бъдат изведени в друга публикация **еднозначните (неусловни решения) на ИФА**.

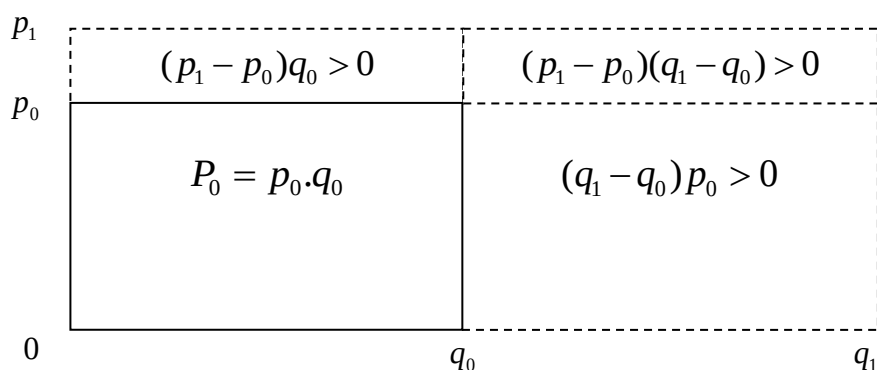
1. Извеждане на геометричен метод с елементарните математически критерии за единичните адитивни факторни анализи на обемни резултативни величини с два фактора в икономиката

Всяка обемна резултативна величина в икономиката, която се представя аналитично като произведение на два интензивен и екстензивен фактора, може да се представи и **геометрично с два правоъгълника**. Идеята за такова геометрично представяне произлиза от **геометричната вероятност за умиране q_x** , с която **броят на умрелите** в едногодишните възрастови интервали от x до $x+1$ години (обемни резултативни величини) се представят **геометрично с квадрати**, според теорията на вероятностите. Например обемът на **продукцията** на една стока P според единичната факторна мултипликативна зависимост $P = p \cdot q$, където p е **цената** на стоката, q е **нейното натурално количество**, се представя с **площа на правоъгълник** с основа q (екстензивният фактор) и височина p (интензивният фактор). Следователно според тази факторна зависимост, всяка натурална единица, например 1 кг. от общото натурално количество q на стоката, се характеризира с една и съща цена p . **Обемите** на продукцията на същата стока за базисен и отчетен период се представят геометрично с **два правоъгълника** $P_0 = p_0 \cdot q_0$ за базисния период и $P_1 = p_1 \cdot q_1$ за отчетния период. Те се нанасят на двумерна правоъгълна координатна система, като **първо** се нанася правоъгълникът за базисния период, а след това върху него правоъгълникът за отчетния период. Двата правоъгълника имат общо нулево начало. На абсцисната ос на координатната система се нанасят

основите на двата правоъгълника (стойностите на екстензивния фактор q_0 и q_1), а на ординатната ос се нанасят височините на двата правоъгълника (стойностите на интензивния фактор p_0 и p_1). По този начин двата правоъгълника образуват една фигура. С **разликата между площите** на двата правоъгълника $\Delta P = P_1 - P_0 = p_1 \cdot q_1 - p_0 \cdot q_0$, се представя **разликата между обемите** на общата продукция на стоката от отчетния и базисния период (увеличение или намаление) от **едновременните промени** на двата фактора $\Delta p = p_1 - p_0$ и $\Delta q = q_1 - q_0$. Правоъгълникът за базисния период може да бъде с произволна дължина на основата, която е за стойностите на екстензивния фактор q_0 и q_1 . Тя е по-голяма от височината на правоъгълника за стойностите p_0 и p_1 на интензивния фактор, които обикновено са по-малки числа. Необходимо е обаче промените на двата фактора Δq и Δp на фигурите да бъдат **пропорционални** на промените Δq и Δp с числата в задачата.

На следващите фигури от 1 до 4 са представени **геометрично** еднозначните (неусловни) решения на адитивните факторни анализи на промените в обема на общата продукция на една стока $\Delta P = P_1 - P_0$ според четирите възможни едновременни промени на нейната цена $\Delta p = p_1 - p_0$ и на нейното натурално количество $\Delta q = q_1 - q_0$. Представените фигури обаче са **условни**, защото за улеснение на читателя, на тях са означени възможните верни и точни ефекти като **резултат30и** от анализите.

1.1 При едновременни увеличения на цената $p_1 > p_0$ и на натуралното количество $q_1 > q_0$ (елементарните математически критерии), геометричното решение на увеличението на продукцията на стоката $\Delta P > 0$, е представено на фигура 1 със следните ефекти:



Фигура 1

$$0 < \Delta P = P_1 - P_0 = p_1 q_1 - p_0 q_0 = (p_1 - p_0) q_0 + (q_1 - q_0) p_0 + (p_1 - p_0)(q_1 - q_0) = \Delta P_p + \Delta P_q + \Delta P_{pq},$$

където $\Delta P = P_1 - P_0 = p_1 q_1 - p_0 q_0$ е разликата в площите на двата правоъгълника, която представя увеличението на продукцията на стоката през

отчетния спрямо базисния период. Тя се подразделя на следните **площи или ефекти** от увеличенията на двата фактора:

Двата **нетни** положителни ефекта или увеличения на продукцията са $\Delta P_p = (p_1 - p_0)q_0 > 0$, **само** от увеличението на цената на стоката $\Delta p = (p_1 - p_0) > 0$ и $\Delta P_q = (q_1 - q_0)p_0 > 0$, **само** от увеличението на натуралното количество на стоката $\Delta q = (q_1 - q_0) > 0$.

Посочените ефекти се определят с произведенията на двете факторни промени $(p_1 - p_0) > 0$ и $(q_1 - q_0) > 0$, със по-малките стойности на другите фактори q_0 и p_0 от базисния период! Тези стойности се намират от елементарните математически критерии или неравенствата между отчетните и базисните стойности на другия фактор $q_1 > q_0$ и $p_1 > p_0$.

Третият ефект на фигура 1 е **съвместният положителен ефект** (също увеличение на продукцията) с $\Delta P_{pq} = \Delta p \Delta q = (p_1 - p_0)(q_1 - q_0) > 0$ от съвместните едновременни увеличения на цената $\Delta p = (p_1 - p_0) > 0$ и на натуралното количество на стоката $\Delta q = (q_1 - q_0) > 0$.

Трите площи или ефекта на фигура 1 са отделени помежду си с пунктирани линии. Тяхната сума е точно **равна** на разликата в обема на продукцията: $0 < \Delta P = P_1 - P_0 = \Delta P_p + \Delta P_q + \Delta P_{pq}$.

С отношенията на трите абсолютни ефекта спрямо базисната стойност на продукцията P_0 се получават трите положителни **относителни ефекта**

$\frac{\Delta P_p}{P_0} > 0, \frac{\Delta P_q}{P_0} > 0$ и $\frac{\Delta P_{pq}}{P_0} > 0$. Тяхната сума е точно **равна** на относителния

прираст на продукцията $\frac{\Delta P}{P_0} > 0$, или $\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_q}{P_0} + \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$

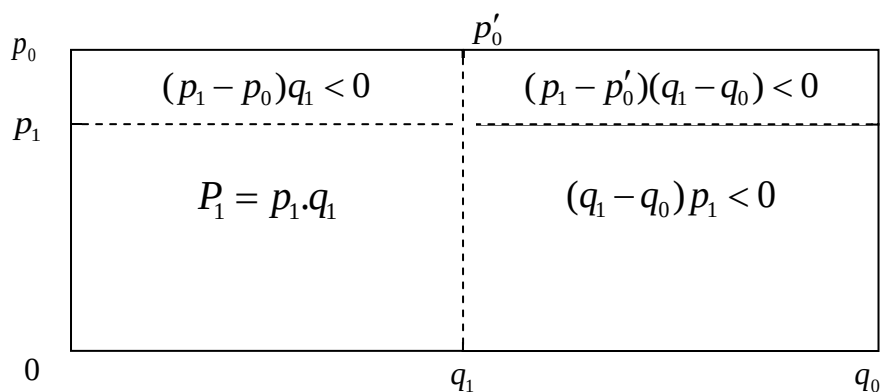
Относителните ефекти са крайни решения на АФА. Те са много важни, защото са **крайни резултати** и от ИФА, които ще бъдат представени в друга публикация.

Предлагам пример на читателят с малки числа, удобен за изчисления, който е също условен, защото е от данни с големи числа за продукция в евро и натурални количества в хиляди бройки:

$$p_0 = 50 \text{ хил. лв. и } p_1 = 59 \text{ хил. лв. } q_0 = 180 \text{ броя и } q_1 = 200 \text{ броя.}$$

$$P_0 = p_0 \cdot q_0 = 50 \cdot 180 = 9000 \text{ хил. лв. и } P_1 = p_1 \cdot q_1 = 59 \cdot 200 = 11800 \text{ хил. лв.}$$

1.2 При едновременни намаления на цената $p_1 < p_0$ и на натуралното количество $q_1 < q_0$ (елементарните математически критерии), геометричното решение на намалението на продукцията на стоката $\Delta P < 0$, е представено на фигура 2 със следните ефекти:



Фигура 2

$$0 > \Delta P = P_1 - P_0 = p_1 q_1 - p_0 q_0 = -|p_1 - p'_0|q_1 - |q_1 - q_0|p_1 - \\ -|p_1 - p'_0||q_1 - q_0| = -\Delta P_p - \Delta P_q - \Delta P_{pq},$$

Случаят с едновременните намаления на двата фактора е **обратен** на предходния случай с едновременните увеличения на факторите. С едни и същи данни площите или ефектите в случая с намаления на факторите са същите по абсолютна стойност площи или ефекти както в случая с увеличенията на факторите, но са с обратни (отрицателни) алгебрични знаци. Или при едни и същи данни но при разменени места на двата периода, двата случая са взаимнообратими.

Разликата в площите на двата правоъгълника на фигура 2 представя намалението на продукцията на стоката през отчетния спрямо базисния период. Тя се състои от следните площи или ефекти от намаленията на двата фактора:

Двата **нетни** отрицателни ефекта или намаления на продукцията са - $-\Delta P_p = -|p_1 - p_0|q_1$, **само** от намалението на цената на стоката $\Delta p = (p_1 - p_0) < 0$ и $-\Delta P_q = -|q_1 - q_0|p_1$, **само** от намалението на натуралното количество на стоката $\Delta q = (q_1 - q_0) < 0$.

Тези ефекти се определят с произведенията на двете факторни промени $(p_1 - p_0) < 0$ и $(q_1 - q_0) < 0$, с по-малките стойности на другите фактори q_1 и p_1 от отчетния период! Същите стойности се намират с **елементарните математически критерии** или неравенствата между отчетните и базисните стойности на двата фактора $q_1 < q_0$ и $p_1 < p_0$.

Третият ефект на фигура 2 е **съвместният отрицателен ефект** (също намаление на продукцията) с $-\Delta P_{pq} = -(p_1 - p_0)(q_1 - q_0) < 0$ от едновременните съвместни намаления на цената $\Delta p = (p_1 - p_0) < 0$ и на натуралното количество на стоката $\Delta q = (q_1 - q_0) < 0$.

Трите отрицателни площи или ефекти на фигура 2 са отделени помежду си с пунктирани линии. Тяхната сума е точно **равна** на отрицателната разлика в обема на продукцията:

$$0 > \Delta P = P_1 - P_0 = -\Delta P_p - \Delta P_q - \Delta P_{pq}$$

С отношенията на трите отрицателни ефекта спрямо базисната стойност на продукцията P_0 се получават трите отрицателни **относителни ефекта** $\frac{\Delta P_p}{P_0} < 0, \frac{\Delta P_q}{P_0} < 0$ и $\frac{\Delta P_{pq}}{P_0} < 0$. Тяхната сума е точно **равна** на относителното намаление на продукцията, или

$$0 > \frac{\Delta P}{P_0} = -\frac{\Delta P_p}{P_0} - \frac{\Delta P_q}{P_0} - \frac{\Delta P_{pq}}{P_0}$$

Примерът за този случай е със следните данни:

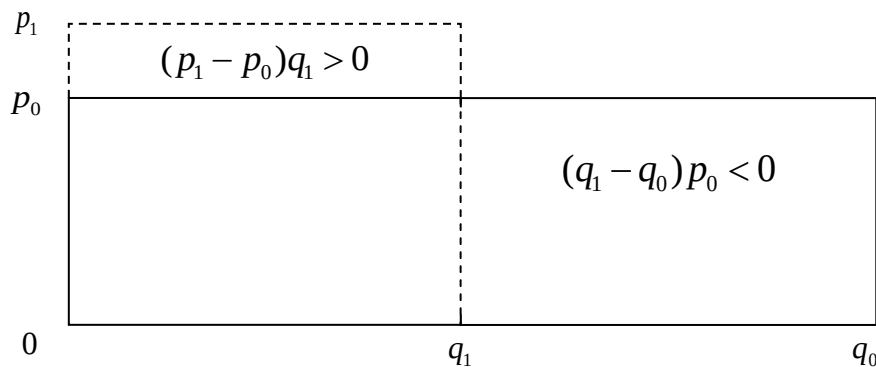
$p_0 = 59$ хил. лв. и $p_1 = 50$ хил. лв. $q_0 = 200$ броя и $q_1 = 180$ броя.

$P_0 = p_0 \cdot q_0 = 59 \cdot 200 = 11800$ хил. лв. и $P_1 = p_1 \cdot q_1 = 50 \cdot 180 = 9000$ хил. лв.

Този случай с едновременните намаления на двата фактора и с трите отрицателни ефекта не ги срещнах нито в нашата статистическа учебна и научна литература, нито в чуждата статистическа литература. Същият случай ми даде обаче **конкретния повод** да въведа елементарните математически критерии за избора на вярната двойка по-малки стойности на другия фактор за промените на двата фактора

Решенията на двата случая с увеличения на двата фактора на фигура 1 и намаления на двата фактора на фигура 2, са решения при **еднопосочни промени** на факторите.

1.3. При едновременни **разнопосочни промени** на двата фактора, с **увеличение** на цената $p_1 > p_0$ (интензивният фактор) и **намаление** на натуралното количество на стоката $q_1 < q_0$, (елементарните математически критерии), геометричното решение на промяната в обема на продукцията на стоката ΔP (увеличение или намаление), е представено на фигура 3 със следните ефекти:



Фигура 3

$$\Delta P = P_1 - P_0 = p_1 q_1 - p_0 q_0 = (p_1 - p_0) q_1 - |q_1 - q_0| p_0 = \Delta P_p - \Delta P_q,$$

където ΔP може да бъде $\Delta P > 0$ или $\Delta P < 0$.

Разликата $\Delta P = P_1 - P_0 = p_1 q_1 - p_0 q_0$, е на площите на двата правоъгълника, която може да представя **увеличение** на продукцията на стоката

през отчетния спрямо базисния период, ако $P_1 > P_0$, или **намаление** на продукцията на стоката, ако $P_1 < P_0$. Разликата $\Delta P = P_1 - P_0$ се подразделя на следните две площи или ефекти от посочените разнопосочни промени на двата фактора:

Нетен положителен ефект или увеличение на продукцията $\Delta P_p = (p_1 - p_0)q_1 > 0$, който е **само** от увеличението на цената на стоката $\Delta p = (p_1 - p_0) > 0$ и **нетен** отрицателен ефект или намаление на продукцията на стоката $\Delta P_q = -|q_1 - q_0|p_0$, който е **само** от намалението на натуралното количество на стоката $\Delta q = (q_1 - q_0) < 0$.

Първият ефект се определя с произведението на промяната на цената $\Delta p = (p_1 - p_0)$ с по-малката стойност на другия фактор q_1 (натуралното количество) от отчетния период! Вторият ефект се определя с произведението на факторната промяна на натуралното количество $\Delta q = (q_1 - q_0)$ също с по-малката стойност на другия фактор p_0 (цената) но от базисния период! Тези по-малки стойности се намират от неравенствата между отчетните и базисните стойности на двата фактора $q_1 < q_0$ и $p_1 > p_0$ (**елементарните математически критерии**).

В случая на разнопосочни промени на двата фактора **няма съвместен ефект**, защото мястото за него на фигура 3 е **празно**. Логически и икономически не е възможно при едновременно увеличение на единия фактор и намаление на другия фактор да има съвместен ефект през отчетния период!

Алгебричната сума на двата ефекта е точно **равна** на разликата в обема на продукцията:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = \Delta P_p - \Delta P_q$$

Тази разлика може да бъде положителна величина $\Delta P = (P_1 - P_0) > 0$ (увеличение на продукцията), ако положителния ефект ΔP_p е **по-голям** от отрицателния ефект ΔP_q по абсолютна стойност, или $\Delta P_p > |-\Delta P_q|$. И обратно, разликата $\Delta P = (P_1 - P_0) < 0$ е отрицателна величина (намаление на продукцията), ако положителният ефект е ΔP_p е **по-малък** от отрицателния ефект ΔP_q по абсолютна стойност, или $\Delta P_p < |-\Delta P_q|$.

С отношенията на двата нетни ефекта спрямо базисната стойност на продукцията P_0 се получават двата **относителни ефекта** $\frac{\Delta P_p}{P_0} > 0$, и $\frac{\Delta P_q}{P_0} < 0$. Тяхната алгебрична сума е точно **равна** на относителния прираст или намаление на продукцията:

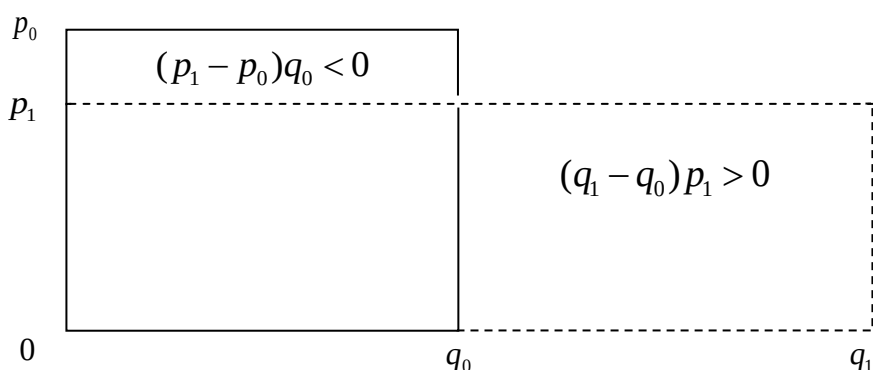
$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{\Delta P_p}{P_0} - \frac{\Delta P_q}{P_0}$$

Примерът за този случай е със следните данни:

$p_0 = 53,5$ хил. лв. и $p_1 = 65$ хил. лв. $q_0 = 200$ броя и $q_1 = 180$ броя.

$P_0 = p_0 \cdot q_0 = 53,5 \cdot 200 = 10700$ хил. лв. и $P_1 = p_1 \cdot q_1 = 65 \cdot 180 = 11700$ хил. лв.

1.4 Другият случай с едновременни **разнопосочни факторни промени** е с **намаление** на цената $p_1 < p_0$ и **увеличение** на натуралното количество на стоката $q_1 > q_0$ (елементарните математически критерии). Геометричното решение на промяната в обема на продукцията (увеличение или намаление) е представено на фигура 4 със следните ефекти:



Фигура 4

$$\Delta P = P_1 - P_0 = p_1 q_1 - p_0 q_0 = -|p_1 - p_0| q_0 + (q_1 - q_0) p_1 = -\Delta P_p + \Delta P_q,$$

където разликата $\Delta P = P_1 - P_0 = p_1 q_1 - p_0 q_0$ е с площите на двата правоъгълника. Тя може да представя **увеличение** на продукцията на стоката през отчетния спрямо базисния период, ако $P_1 > P_0$, или **намаление** на продукцията на стоката, ако $P_1 < P_0$.

Разликата $\Delta P = P_1 - P_0$ се подразделя на следните две площи или ефекти от посочените разнопосочни промени на двата фактора:

Нетният отрицателен ефект или намаление на продукцията $\Delta P_p = -|p_1 - p_0| q_0$, е **само** от намалението на цената на стоката $\Delta p = (p_1 - p_0) < 0$ и **нетният** положителен ефект или увеличение на продукцията $\Delta P_q = (q_1 - q_0) p_1 > 0$, който е **само** от увеличението на натуралното количество на стоката $\Delta q = (q_1 - q_0) > 0$.

Този случай на разнопосочните факторни промени е взаимнообратим с предходния случай на фигура 3, защото при едни и същи данни, но при разменени места за двата периода, се получават същите по абсолютна стойност ефекти, но с обратни алгебрични знаци.

Факторният множител на факторната промяна на цената $\Delta p = (p_1 - p_0) < 0$ е по-малката стойност на другия фактор q_0 (натуралното количество) от базисния период! Факторният множител на факторната промяна на натуралното количество $\Delta q = (q_1 - q_0) < 0$, е също с по-малката стойност на другия фактор p_1 (цената на стоката) от отчетния период! Тези по-малки стойности се намират от неравенствата между отчетните и базисните стойности на двата фактора $q_1 > q_0$ и $p_1 < p_0$ (**елементарните математически критерии**).

В този случай на разнопосочни факторни промени, както в предходния случай за тези промени на фигура 3, **няма съвместен ефект**, защото мястото за него на фигура 4 е **празно**. Причината е известна, защото логически и икономически е невъзможно при едновременно намаление на единния фактор и увеличение на другия фактор да има съвместен ефект.

Алгебричната сума на двата нетни ефекта на фигура 4 е точно **равна** на разликата в обема на продукцията:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = -\Delta P_p + \Delta P_q$$

Тази разлика може да бъде положителна величина $\Delta P = (P_1 - P_0) > 0$, ако положителният ефект $\Delta P_q > 0$ е **по-голям** от отрицателния ефект по абсолютна стойност $|\Delta P_p|$, или $\Delta P_q > |\Delta P_p|$. И обратно, разликата $\Delta P = (P_1 - P_0) < 0$ е отрицателна величина, ако отрицателният ефект по абсолютна стойност $|\Delta P_p|$ е **по-голям** от положителния ефект ΔP_q или $|\Delta P_p| > \Delta P_q$.

С отношенията на двата нетни ефекта спрямо базисната стойност на продукцията P_0 се получават двата **относителни ефекта** $\frac{\Delta P_p}{P_0} < 0$, и $\frac{\Delta P_q}{P_0} > 0$. Тяхната алгебрична сума е също точно **равна** на относителния прираст или намаление на продукцията:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = -\frac{\Delta P_p}{P_0} + \frac{\Delta P_q}{P_0}$$

Примерът за този случай е със следните данни:

$p_0 = 65$ хил. лв. и $p_1 = 53,5$ хил. лв. $q_0 = 180$ броя и $q_1 = 200$ броя.

$P_0 = p_0 \cdot q_0 = 65 \cdot 180 = 11700$ хил. лв. и $P_1 = p_1 \cdot q_1 = 53,5 \cdot 200 = 10700$ хил. лв.

От всичките четири възможни решения на промяната на продукцията на една стока според промените са нейната цена $\Delta p = (p_1 - p_0)$ и на нейното натурално количество $\Delta q = (q_1 - q_0)$, могат да се направят следните изводи:

От еднопосочните промени на двата фактора p и q (едновременно увеличения или намаления) се получават **два нетни положителни или отрицателни ефекти** (интензивния и екстензивния, които са увеличения или

намаление на продукцията) и **положителен или отрицателен съвместен ефект** (увеличение или намаление на продукцията).

От разнопосочните промени на двата фактора се получават **само два нетни ефекта**:

- положителен ценови (интензивен) ефект. При $p_1 > p_0$ и отрицателен (екстензивен) ефект при $q_1 < q_0$ и обратно;
- отрицателен ценови (интензивен) ефект при $p_1 < p_0$ и положителен (екстензивен) ефект при $q_1 > q_0$

Нетните ефекти от четирите възможни промени на двата фактора се определят с произведенията на всяка факторна разлика $(p_1 - p_0)$ и $(q_1 - q_0)$ с по-малките стойности на другия фактор според **елементарните математически критерии**: с q_0 от базисния период при $q_1 > q_0$ или с q_1 от отчетния период при $q_1 < q_0$ и с p_0 от базисния период при $p_1 > p_0$ или с p_1 от отчетния период при $p_1 < p_0$.

Представените решения на единичния АФА с два фактора не ес различават принципно от решенията във висшето икономическо образование по статистика. Ще обърна внимание все пак на две различия, които не променят моето съгласие с образованието. Първото е съществено различие за въведените елементарни, но строги математически критерии за еднозначните решения на АФА, които ги няма в образованието. Второто различие е за случая с едновременните намаления на двата фактора. Той е много рядък, но и много срещан за намаления на обемни резултативни величини, например на брутната добавена стойност V (БДС) от намаленията на БДС на един зает (интензивен фактор) и на броя на заетите (екстензивен фактор) при **големи финансово-икономически** кризи като световната през периода 2008-2009 г. (Стойкова-Къналиева, Найденов и Бозев, 2016) Никъде не срещнах обаче в това изследване, нито в учебната литература, формулата за вярното решение - $-|p_1 - p_0|q_1 - |q_1 - q_0|p_1 - |p_1 - p_0| \cdot |q_1 - q_0|$. Вместо нея, вероятно се използва формулата $-|p_1 - p_0|q_0 - |q_1 - q_0|p_0 - |p_1 - p_0| \cdot |q_1 - q_0|$. В тази формула участват по-голямите стойности q_0 и p_0 , вместо вярните по-малки стойности q_1 и p_1 . Действително и с по-голямите стойности q_0 и p_0 се получава също вярната и точна разлика ΔV , но **вярните и точни ефекти** се определят **само** с по-малките стойности q_1 и p_1 според елементарните математически критерии $p_1 < p_0$ и $q_1 < q_0$.

Ако нямам принципни различия с образованието за еднозначните (неусловни) решения на АФА на промените на обемни резултативни величини (продукции) от промените на интензивни и екстензивни фактори, появи се изненадващо един невероятен удар срещу този АФА. Той е публикуван в монография от ст.н.с. II степен (доцент) д-р Нина Янкова от бившия Икономически институт на БАН (Янкова, 2007). В тази монография първият и най-прост случай на лесния за решение АФА на увеличението на обемна резултативна величина (продукция S) от увеличението на x (средната производителност на труда на един зает) и на y (броят

на заетите) през отчетен период спрямо базисен период, е обявен за **тавтология**¹! Това означава, че от увеличението на двата фактора **нямамо никакви ефекти (прирасти на продукцията)**! На с. 126 е представено решението на АФА, което се използва **в целия свят**:

$$\begin{aligned}\Delta S &= x_1 y_1 - x_0 y_0 = \Delta x y_0 + x_0 \Delta y + \Delta x \Delta y = \\ &= (x_1 - x_0) y_0 + x_0 (y_1 - y_0) + (x_1 - x_0)(y_1 - y_0)\end{aligned}$$

Както читателят може да види, това е вярното и точно решение на фигура 1 в моя доклад. Авторката на монографията обаче **унищожава ефектите** с разкриване на скобите на факторните промени, за да ес получат двойки условни обеми на продукции. Двата условни обема във всяка двойка са **равни по абсолютна стойност, но са с противоположни алгебрични знаци**. По този начин те взаимно се анулират и ефектите **изчезват**! Естествено, че след като са **отпаднали ефектите**, остава само разликата $\Delta S = x_1 y_1 - x_0 y_0$, която авторката обявява за **тавтология**! (с. 127) Нямам повече коментар. Само ще отбележа, че това е голям удар срещу висшето икономическо образование по статистика, защото не е само лично мнение, но ес името и авторитета на БАН! Само че монографията е без рецензенти и не се знае, кой носи отговорност за нея, дали БАН или някой друг освен авторката? Не зная дали е реагирало досега икономическото образование, но аз съм длъжен да го предупредя. Досега съм мълчал, защото не бях решил още еднозначно ИФА, който авторката на монографията е обявила също за **тавтология**!

2. Множествен адитивен факторен анализ на продукцията от съвкупности на стоки

Освен за АФА на промяната на продукцията на **една стока**, предлаганата методика може да се използва и за **множествени АФА** на продукцията на **съвкупности от еднородни и от разнородни стоки**. Еднородната съвкупност е крайно множество или брой на екземплярите на една стока (натуралното количество) **от точно определен вид**. Например такива еднородни само хранителни стоки от „потребителска кошница”, които се наблюдават от НСИ, са 46 на брой.

Еднородните стоки се различават по производствени цени на едро от различните производители, търговски цени на едро и цени на дребно за различно качество от различните търговци, както и от надценките за различните пазари. Необходимо е да се отбележи, че няма формални и точни критерии за определянето на една съвкупност на стоки като еднородна. В много случаи еднородните съвкупности са определят от НСИ според държавни и международни стандарти. Независимо от това, трябва да се знае точно състава на такава съвкупност, за да се прецени, дали тя е достатъчно еднородна според целта и задачата на анализа.

Освен еднородните съвкупности на стоките, много по-разпространени са **разнородните съвкупности на стоките**. Всяка такава съвкупност съдържа **най-малко две различни стоки**, независимо, че могат да са предназначени за задоволяването на някаква потребност от точно определен вид. Например **необходимите суровини и материали** за производството на определена стока образуват **разнородна съвкупност**. Типичен пример за разнородни съвкупности за населението са т.нар. „**потребителски кошници**” на НСИ от различни стоки и услуги, за които населението прави разходи за своята издръжка. Следователно всяка единична стока може да участва както в еднородна, така и в разнородна

съвкупност.

На тази основа предлагам множествен АФА на промяната в обема на продукцията от еднородна или от разнородна съвкупност на стоките. Този **множествен АФА** започва най-напред с **единичен АФА за всяка отделна i -та стока на съвкупността**. За тази цел се използват същите фигури от 1 до 4 за единичната стока в предходната точка 1. Необходимо е само **замяна** на означенията Q_0 и Q_1 за натуралните количества на единичната стока с означенията q_{i0} и q_{i1} за натуралните количества на всяка отделна i -та стока от съвкупността, както и **замяна** на означенията P_0 и P_1 за цените на единичната стока с означенията p_{i0} и p_{i1} за цената и натуралното количество на същата отделна i -та стока от съвкупността на стоките. Следователно се прилага също **геометричния метод на двата правоъгълника на фигурите от 1 до 4 за всяка отделна i -та стока** от съвкупността на стоките с **елементарните математически критерии** (неравенства) между отчетните и базисните стойности на цените $p_{i1} > p_{i0}$ или $p_{i1} < p_{i0}$ и на натуралните количества $q_{i1} > q_{i0}$ или $q_{i1} < q_{i0}$. От тези математически критерии **произлизат факторните разлики** $(p_{i1} - p_{i0}) > 0$ или $(p_{i1} - p_{i0}) < 0$ и $(q_{i1} - q_{i0}) > 0$ или $(q_{i1} - q_{i0}) < 0$, както и **по-малките стойности на другия фактор** от базисната или от отчетната година за определянето на **ефектите** от посочените факторни промени.

След определянето на ефектите от единичния АФА на промяната на продукцията на всяка отделна i -та стока на следващ етап се **сумират** нетните (ценови) ефекти със своите алгебрични знаци само от промените на цените на отделните стоки $\sum \Delta P p_i$, нетните ефекти със своите алгебрични знаци **само** от промените на натуралните количества на отделните стоки $\sum \Delta P q_i$, както и съвместните ефекти със своите алгебрични знаци $\sum \Delta P p_i q_i$ алгебричната сума на всички ефекти е **равна на сумата** на промените на продукциите на всички стоки от съвкупността или на промяната на продукцията от цялата съвкупност на стоките, $\Delta P = P_1 - P_0 = \sum \Delta P_i = \sum (P_{i1} - P_{i0}) = \sum \Delta P p_i + \sum \Delta P q_i + \sum P q_i p_i$.

Получените ефекти от множествения АФА могат да бъдат анализирани в хоризонтален и във вертикален разрез. В хоризонтален разрез се отчита **приносът** на всяка i -та стока в промяната на своята продукция ΔP_i с трите или с двата ефекта и след това в промяната на продукцията от съвкупността на всички стоки $\sum \Delta P_i = \Delta P$. Във вертикален разрез се отчита също **приносът** на всяка i -та стока, но с всеки свой отделен ефект $\Delta P p_i$, $\Delta P q_i$, $\Delta P p_i q_i$ със своя алгебричен знак за образуването на съответния **алгебричен сумарен ефект** от всички стоки на съвкупността $\sum \Delta P p_i$, $\sum \Delta P q_i$, $\sum \Delta P p_i q_i$. Тъй като, сумарните ефекти са резултативни величини (салда) от положителни и отрицателни ефекти, предлагам множествения АФА да бъде с **всички единични АФА на отделните стоки**, за да може анализаторът да прави ясен и задълбочен анализ.

Множественият АФА е много важен, защото според предлаганата методика,

от решението на всеки единичен и множествен АФА се преминава в единичен и множествен ИФА. В този смисъл може да се реши и прословутата задача за множествените факторни индекси на цените на стоките и на физическия обем на продукцията (натуралните количества на стоките) на Ласпер и на Пааше (Радилов, 2000). Тук ще представя тези два условни множествени АФА, по-скоро като теоретично възможни, а на практика като редки случаи на анализи. С произведението на тези множествени индекси се получава резултативният индекс за продукцията:

$$I_v = I_{p(q_0)} \cdot I_{q(p_1)} \text{ където } I_v = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}, \text{ е резултативният индекс, известен като}$$

индекс при променлив състав

$$I_{q(p_1)} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \text{ е множественият факторен индекс на цените (при постоянен}$$

състав q_0) на Ласпейрес

$$I_{p(q_1)} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} \text{ е множественият факторен индекс на натуралните количества}$$

на стоките (при постоянен състав p_1) на Пааше

От посоченото индексно равенство, се преминава в **множествен АФА**:

$$\text{От } I_v = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} \text{ се преминава в АФА с разликите:}$$

$$\sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = V_1 - V_0 = \Delta V$$

$$\text{От } I_{p(q_0)} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \text{ се преминава в АФА с разликите:}$$

$$\sum p_1 q_0 - \sum p_0 q_0 = \sum (p_1 - p_0) q_0 = \Delta V_p$$

$$\text{От } I_{q(p_1)} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} \text{ се преминава в АФА с разликите:}$$

$$\sum p_1 q_1 - \sum p_1 q_0 = -\sum (q_1 - q_0) p_1 = \Delta V_q$$

Окончателно,

$$\Delta V = V_1 - V_0 = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = \sum (p_1 - p_0) q_0 - \sum (q_1 - q_0) p_1 = \Delta V_p - \Delta V_q$$

Относителните промени на продукцията са $\frac{\Delta V}{V_0} > 0$ или $\frac{\Delta V}{V_0} < 0$, а относителните

ефекти са $\frac{\Delta V_p}{V_0} > 0$ или $\frac{\Delta V_q}{V_0} < 0$.

Според елементарните математически критерии този множествен АФА е с **разнопосочни факторни промени: увеличения на цените** на всички наблюдавани стоки $p_{i1} > p_{i0}$ и **намаления на всички натурални количества** на стоките

$q_{i1} < q_{i0}$. Най-голямо приложение на този множествен АФА е при икономически кризи с нарастване на цените поради инфлация и намаление на натуралните количества на стоките. Проблемът е само, дали тези факторни промени засягат всички наблюдавани стоки?

Другият множествен ИФА е с множествения факторен индекс на цените (при постоянен състав q_1) на Пааше и с множествения факторен индекс на натуралните количества (при постоянен състав p_0) на Ласпейрес (Цонев, 1998)

$$I_v = I_{p(q1)} \cdot I_{q(p0)},$$

където $I_{p(q1)} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}$ и $I_{q(p0)} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}$

От това индексно равенство се преминава в множествения АФА:

От $I_v = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$, се преминава в АФА с разликите:

$$\sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = V_1 - V_0 = \Delta V$$

От $I_{p(q1)} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}$ се преминава в АФА с разликите:

$$\sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = \sum (p_1 - p_0) q_1 = -\Delta V_p$$

От $I_{q(p0)} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}$, се преминава в АФА с разликите:

$$\sum q_1 p_0 - \sum p_0 q_0 = \sum (q_1 - q_0) p_0 = \Delta V_q$$

Окончателно:

$$\Delta V = V_1 - V_0 = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = -\Delta V_p + \Delta V_q$$

Относителните промени на продукцията са $\frac{\Delta V}{V_0} > 0$ или $\frac{\Delta V}{V_0} < 0$, а

относителните ефекти са $\frac{\Delta V_p}{V_0} > 0$ или $\frac{\Delta V_q}{V_0} < 0$.

Според елементарните математически критерии този множествен АФА е **също с разнопосочни** факторни промени: **намаления на цените** на всички наблюдавани стоки $p_{i1} < p_{i0}$ и **увеличения на всички натурални количества на стоките** $q_{i1} > q_{i0}$. Най-голямото негово приложение обаче е с множествения

факторен индекс на цените на Пааше $I_{p(q1)} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}$. Този индекс е **дефлатор** на стойностните показатели за преминаване на цените от **текущи в съпоставими** по

формулата (Радилов, 2000): $\sum q_1 p_1 : \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}$. За отделното предприятие, фирма и други подобни икономически субекти има **микродефлатори** по специална методика на НСИ.

Освен двата множествени АФА с **разнопосочни факторни промени на всички стоки**, с множествените факторни индекси на Ласпейрес и Пааше могат да се правят и множествени АФА с **еднопосочни факторни промени на всички стоки**. По мое мнение те имат по-скоро теоретичен смисъл при нормални икономически условия. При извънредни и влошени икономически условия обаче, те може да бъдат реални величини. Например при реална опасност от неизбежна война, населението ще се запасява с дълготрайни храни, лекарства и други най-необходимите стоки за своето оцеляване. Тогава ще има случаят с едновременни увеличения $p_1 > p_0$ и $q_1 > q_0$. Другият случай с едновременни намаления на цените $p_1 < p_0$ и на покупките $q_1 < q_0$ ще има при условия на фалит, особено на дребния бизнес, който ще се опитва да спасява каквото може.

В заключение, в следваща публикация ще покажа **еднозначните (неусловни) решения на множествения ИФА със същите окончателни ефекти** от множествените АФА

3. Единичен адитивен факторен анализ на продукцията от однородна съвкупност на стоки

Според едно важно свойство на однородните съвкупности на стоките, само те имат обосновани икономически средни цени $\bar{p}$ и общи натурални количества на стоките Q в едни и същи натурални мерки. Средната цена и общото натурално количество са **сводни (обобщени) характеристики** на всяка однородна съвкупност стоки.

Промяната на продукцията на всяка такава однородна съвкупност на стоки от отчетен и базисен период може да се анализира с **единичен АФА** с подобни елементарни математически критерии. Необходимо е само да се **сменят** означенията на фигурите от 1 до 4. За **екстензивния фактор** (натуралните количества на единичната стока) q_0 и q_1 с означенията на общите натурални количества Q_0 и Q_1 , и означенията за **интензивния фактор** цените p_0 и p_1 на единичната стока с означенията за средните цени $\bar{p}_0$ и $\bar{p}_1$. Ефектите се измерват с подобни формули както за ефектите от АФА на продукцията от единична стока:

3.1. При $\bar{p}_1 > \bar{p}_0$ и $Q_1 > Q_0$, виж фигура 1:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = \bar{p}_1 Q_1 - \bar{p}_0 Q_0 = (\bar{p}_1 - \bar{p}_0) Q_0 + (Q_1 - Q_0) \bar{p}_0 + (\bar{p}_1 - \bar{p}_0)(Q_1 - Q_0) = \Delta P_{\bar{p}} + \Delta P_Q + \Delta P_{\bar{p}Q},$$

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0} + \frac{\Delta P_Q}{P_0} + \frac{\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}$$

3.2. При $\bar{p}_1 < \bar{p}_0$ и $Q_1 < Q_0$, виж фигура 2:

$$\begin{aligned}\Delta P &= P_1 - P_0 = \bar{p}_1 Q_1 - \bar{p}_0 Q_0 = -|\bar{p}_1 - \bar{p}_0| Q_1 - |Q_1 - Q_0| \bar{p}_1 - \\ &- |\bar{p}_1 - \bar{p}_0| |Q_1 - Q_0| = -\Delta P_{\bar{p}} - \Delta P_Q - \Delta P_{\bar{p}Q}, \\ \frac{\Delta P}{P_0} &= -\frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0} - \frac{\Delta P_Q}{P_0} - \frac{\Delta P_{\bar{p}Q}}{P_0}\end{aligned}$$

3.3. При $\bar{p}_1 > \bar{p}_0$ и $Q_1 < Q_0$, виж фигура 3:

$$\begin{aligned}\Delta P &= P_1 - P_0 = \bar{p}_1 Q_1 - \bar{p}_0 Q_0 = (\bar{p}_1 - \bar{p}_0) Q_1 - |Q_1 - Q_0| \bar{p}_0 = \Delta P_{\bar{p}} - \Delta P_Q, \\ \frac{\Delta P}{P_0} &= \frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0} - \frac{\Delta P_Q}{P_0}\end{aligned}$$

3.4. При $\bar{p}_1 < \bar{p}_0$ и $Q_1 > Q_0$, виж фигура 4:

$$\begin{aligned}\Delta P &= P_1 - P_0 = \bar{p}_1 Q_1 - \bar{p}_0 Q_0 = -|\bar{p}_1 - \bar{p}_0| Q_0 + (Q_1 - Q_0) \bar{p}_1 = -\Delta P_{\bar{p}} + \Delta P_Q, \\ \frac{\Delta P}{P_0} &= -\frac{\Delta P_{\bar{p}}}{P_0} + \frac{\Delta P_Q}{P_0}\end{aligned}$$

4. Обобщение на решенията с геометричния метод и елементарните математически критерии с математическата дискретна функция на математическия сигнум

Както отбелязах в началото на доклада, създадох много отдавна геометричния метод с помощта на теорията на вероятностите за нуждите на т.нар. **напречен** демографски факторен анализ. С геометричния метод се извършва АФА на промените на броя на умрелите по единични възрасти M_x от промените на „вероятностите за умиране Q_x ” (интензивните фактори) и на броя на населението на точните възрасти x години или „рисковите съвкупности за умиране” (екстензивните фактори). Тъй като икономистите-статистици в образованието и в икономическите научно-приложни изследвания не прилагат теорията на вероятностите за АФА както в демографската статистика, използвах геометричния метод в публикации само за графично представяне на резултатите (ефектите) от АФА, докато самият анализ извършва логически с индуктивната логика за четирите възможни решения с два фактора (Христов, 1978).

След много дълго време, едва през настоящия век стигнах до извода, че еднозначните решения с геометричния метод могат да бъдат обобщени с дискретна математическа функция (Христов, 2008). Едва по-късно разбрах нейното точно име **дискретна нечетна функция на математическия сигнум (ДНФМС)** и че тя се прилага в инженерно-техническите науки (Bachman, 1966; Kreyszig, 1993). С тази функция и четирите възможни решения на АФА в икономиката могат да се представят само с една формула, но задължително според мен, **с елементарните**

математически критерии. Формулата на ДФМС на АФА на продукцията на всяка единична стока от промените на нейната цена P и натурално количество Q е следната:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = (p_1 - p_0)q_{\min},$$

където $q_{\min}$ е по-малката стойност на другия фактор (натуралното количество на стоката) от базисния или отчетния период, $p_{\min}$ е също по-малката стойност на другия фактор (цената на стоката) от базисния или отчетния период. Тези условия за по-малката стойност на другия фактор се изпълняват единствено от въведените в АФА елементарни математически критерии.

h е параметър (показател) за **наличието или отсъствието** на съвместен ефект. Той взема три стойности 1, 0, -1. От нечетните стойности +1 и -1 произлиза името на дискретната функция като **нечетна**. Същите нечетни стойности показват **алгебричния знак** (математическият сигнум) на съвместния ефект като положителен или отрицателен.

Според елементарните математически критерии решенията на АФА са следните:

– при едновременни увеличения на двата фактора $p_1 > p_0$ и $q_1 > q_0$, $h = +1$ и показва **наличие** на положителен съвместен ефект. Решение с ДНФМС е следното: $\Delta P = P_1 - P_0 = (p_1 - p_0)q_0 + (q_1 - q_0)p_0 + 1(p_1 - p_0)(q_1 - q_0) = (p_1 - p_0)q_0 + (q_1 - q_0)p_0 + (p_1 - p_0)(q_1 - q_0) = \Delta P_p + \Delta P_q + \Delta P_{pq}$

Това решение **съвпада** с геометричното на фигура 1.

– при едновременни намаления на двата фактора $p_1 < p_0$ и $q_1 < q_0$, $h = -1$ и показва **наличие** на отрицателен съвместен ефект. Решението с ДНФМС е следното:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = (p_1 - p_0)q_1 + (q_1 - q_0)p_1 - 1(p_1 - p_0)(q_1 - q_0) = -|p_1 - p_0|q_1 - |q_1 - q_0|p_1 - |p_1 - p_0||q_1 - q_0| = -\Delta P_p - \Delta P_Q - \Delta P_{pQ}$$

Това решение **съвпада** с геометричното на фигура 2.

– при увеличение на цената $p_1 > p_0$ и намаление на натуралното количество на стоката $q_1 < q_0$, $h = 0$ и показва, че не може да има съвместен ефект. Решението с ДНФМС е следното:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = (p_1 - p_0)q_1 + (q_1 - q_0)p_0 + 0(p_1 - p_0)(q_1 - q_0) = (p_1 - p_0)q_1 - |q_1 - q_0|p_0 = \Delta P_p - \Delta P_q$$

Това решение **съвпада** с геометричното на фигура 3.

– при намаление на цената $p_1 < p_0$ и увеличение на натуралното количество на стоката $q_1 > q_0$, $h = 0$ и показва също отсъствие на съвместен ефект. Решението с ДНФМС е следното:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = (p_1 - p_0)q_0 + (q_1 - q_0)p_1 + 0(p_1 - p_0)(q_1 - q_0) = -|p_1 - p_0|q_0 + (q_1 - q_0)p_1 = -\Delta P_p + \Delta P_q$$

Това решение също **съвпада** с геометричното на фигура 4.

Със същата ДНФМС се решава **множествения АФА** на продукцията на съвкупност от стоки **чрез АФА на всяка отделна i -та стока** от съвкупността на стоките. За целта се използва ДНФМС за всяка отделна i -та стока:

$$\Delta P_i = P_{i1} - P_{i0} = (p_{i1} - p_{i0})q_{i\min} + (q_{i1} - q_{i0})p_{i\min} + h_i(p_{i1} - p_{i0})(q_{i1} - q_{i0})$$

където всички означения са известни.

Търсят се решенията с ДНФМС със следните **елементарни математически критерии и стойности на h_i**

$$p_{i1} > p_{i0}, q_{i1} > q_{i0} \text{ и } h_i = +1$$

$$p_{i1} < p_{i0}, q_{i1} < q_{i0} \text{ и } h_i = -1$$

$$p_{i1} > p_{i0}, q_{i1} < q_{i0} \text{ и } h_i = 0$$

$$p_{i1} < p_{i0}, q_{i1} > q_{i0} \text{ и } h_i = 0$$

Получените ефекти за всяка i -та стока се **сумират** хоризонтално и вертикално, както в точка 2 за множествения АФА на продукцията от всички стоки на съвкупността.

Завършвам АФА с ДНФМС на продукцията от однородна съвкупност на стоки със **средна цена $\bar{p}$ и общо натурално количество на всички стоки Q** . Формулата на ДНФМС за този единичен АФА е следната:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = (\bar{p}_1 - \bar{p}_0)Q_{\min} + (Q_1 - Q_0)\bar{p}_{\min} + h(\bar{p}_1 - \bar{p}_0)(Q_1 - Q_0),$$

където $Q_{\min}$ е **по-малката стойност** от базисния или отчетния период и $\bar{p}_{\min}$ е също **по-малката стойност** от базисния или отчетния период. Според елементарните математически критерии, $h = +1, 0, -1$ Мисля, че читателят вече може сам да решава този АФА с ДНФМС.

Завършвам изложението с извода за **смисъла и необходимостта** от елементарните математически критерии. Те са първите показатели за евентуално **наличие на инфлация**. От тях се извежда **необходимостта** множествените АФА и ИФА да се извършват най-напред с АФА и ИФА на **отделните стоки** във всяка съвкупност на стоки. Елементарните математически критерии обаче не са критерии срещу подмяната на необходимите стоки със заместители с по-ниско качество и дори с вредни за здравето влияния. За оценяване на качеството на стоките носят отговорност други институции на държавата, а не математиката, икономическата статистика и НСИ.

Най-накрая, ще завърша с обещанието за еднозначните (неусловни) решения на ИФА в следваща публикация. По този начин ще реализирам идеята на покойния акад. Иван Стефанов за адитивно решение на ИФА.

БЕЛЕЖКИ

1. Означенията на продукцията и на двата фактора са на проф. Кирил Гатев в учебника Въведение в статистиката, 1995 г., с. 362.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Bachman, G., L. Narici (1966) *Functional analyses*. N. Y., Academic Press.
2. Gatev, K. (1995) *Vavedenie v statistikata*. Sofia, LIA.
3. Kreyszig, E. (1993) *Advanced Engineering Mathematics*. N. Y., John Willey,

4. Radilov, D. (2000) *Ikonomicheska statistika*. Varna, Ikonomicheski universitet - Varna.
5. Stefanov, Iv. i A. Yu. Totev (1960) *Teoria na statistikata*. Sofia, Nauka i izkustvo.
6. Sugarev, Z. (1975) *Demografska statistika*. Sofia, Nauka i izkustvo.
7. Stoykova-Kanalieva, A., A. Naydenov i V. Bozev (2016) *Statistichsko sravnitelno izsledvane na strukturite, strukturnite razlichia i strukturnata dinamika na osnovni makroikonomicheski pokazатели (brutna dobavena stoynost) na stranite ot Evropeyskia sayuz prez perioda 2000-2014 g.* Sofia, UNSS.
8. Hristov, E. (1978) Prirastat na produktsia spored promenite vav vlozhenoto kolichestvo trud i proizvoditelnostta na truda. *Statistika*, kn. 5.
9. Hristov, E. (2008) Edno dostatachno uslovie za ednoznachni reshenia na faktorni promeni na stoynostni (absolyutni rezultativni velichini). *Statistika*, kn. 3.
10. Tsonev, V. (1998) Teoriyata na indeksite i neynata statisticheska alternativa. *Statistika*, kn. 1.
11. Yankova, N. (2007) *Statistichsko izsledvane na strukturni izmenenia*. Sofia, Ikonomicheski institut na BAN, Akad. izdatelstvo „Prof. Marin Drinov”.

INVERSE FUNCTION AND INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

Professor Sava Grozdev, DSc

Faculty of Mathematics and Informatics, Paisii Hilendarski University of Plovdiv, Bulgaria

Professor Veselin Nenkov, PhD

Faculty of Engineering, Nikola Vaptsarov Naval Academy

Associate Professor Tatyana Madzharova, PhD

Faculty of Engineering, Nikola Vaptsarov Naval Academy

Abstract: The concept of inverse function is one of the most difficult for students to understand. On the other hand, the introduction of inverse trigonometric functions further complicates the understanding of inverse functions. Therefore, here we have tried to show one way of introducing the concept of an inverse function. At the same time, special attention was paid to obtaining the inverse trigonometric functions.

Keywords: Inverse function, Inverse trigonometric functions

JEL code: C0

ОБРАТНА ФУНКЦИЯ И ОБРАТНИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ФУНКЦИИ

Професор д-р Сава Гроздев

Факултет по математика и информатика, Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, България

Професор д-р Веселин Ненков

Факултет Инженерен, Висше военноморско училище „Н. Й. Вапцаров“, България

Доцент д-р Татяна Маджарова

Факултет Инженерен, Висше военноморско училище „Н. Й. Вапцаров“, България

Въведение. Едно от най-трудните за разбиране от студентите е понятието обратна функция. От друга страна въвеждането на обратните тригонометрични функции допълнително усложнява разбирането на обратните функции. Затова тук сме се опитали да покажем един начин за въвеждане в понятието обратна функция. Същевременно е обърнато по-специално внимание на получаването на обратните тригонометрични функции.

1. Обратна функция. Да разгледаме няколко стойности на функцията $f(x) = 2x$, подредени в таблица 1. Графиката на тази функция е показана на фиг. 1. Ако разменим местата на двата реда в тази таблица, получаваме таблица 2, която дефинира друга функция $g(y)$. Графиката на тази функция е показана на фиг. 2. Следователно, когато на стойностите y на функцията $f(x) = 2x$ съпоставим стойностите на x , от които тези y са получени, се дефинира друга функция

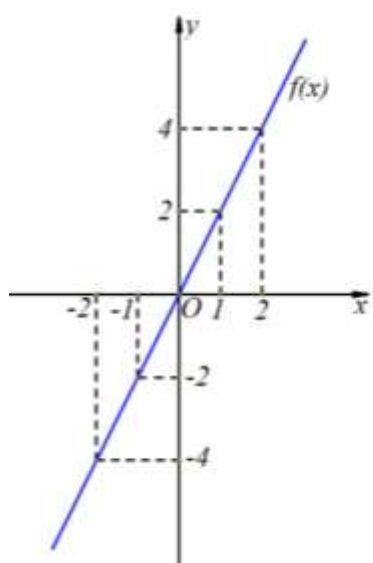
$g(y) = \frac{y}{2}$. Ако в последната функция заменим y с x , получаваме функцията $\frac{x}{2}$, която се означава с $f^{-1}(x)$, т.е. $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$. Функцията $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ наричаме обратна на $f(x) = 2x$. Графиките на двете функции са прави линии. Ако начертаем тези графики спрямо една координатно система, забелязваме, че тези прави са симетрични спрямо ъглополовящата на първи-трети квадрант.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x$	-4	-2	0	2	4

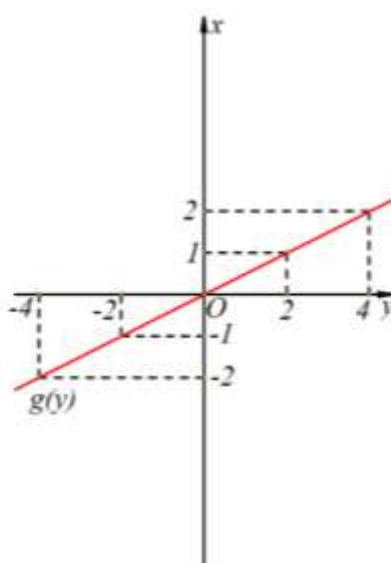
Таблица 1

y	-4	-2	0	2	4
$x = \frac{y}{2}$	-2	-1	0	1	2

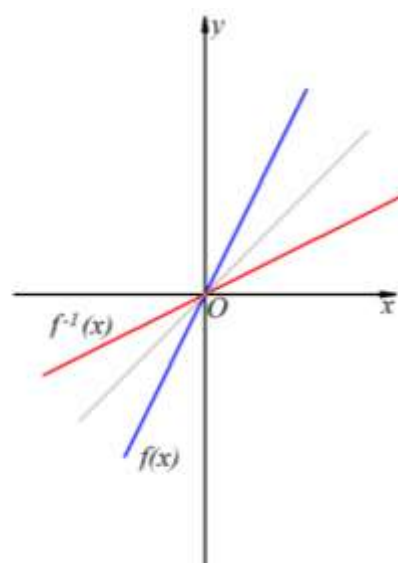
Таблица 2



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

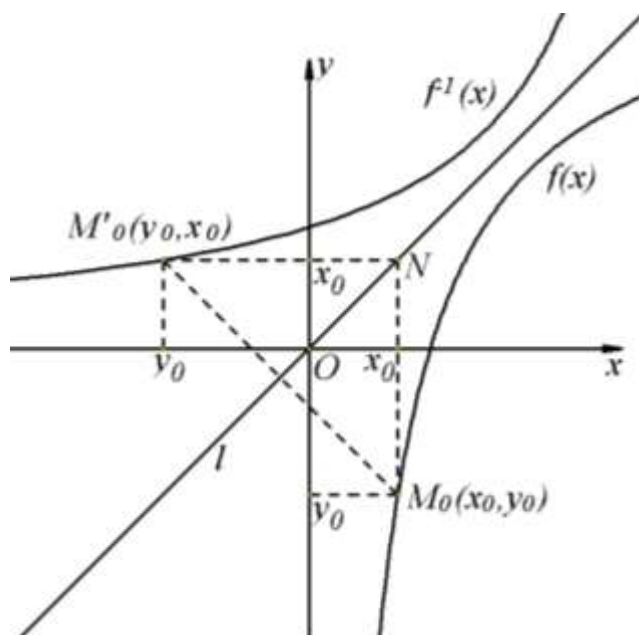
Тези наблюдения можем да обобщим при разглеждането на други функции.

Нека на всяко x от множеството X чрез функцията f е съпоставено точно едно $y = f(x)$ от множеството Y . Тогава на всяко y от Y чрез функция g може да се съпостави единственото x от X , от което се е получило y , т.е. $g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$. В този случай g се означава с f^{-1} и се нарича *обратна на f* . Следователно дефиниционната област на f^{-1} е множеството Y , а областта ѝ от стойности е X . Ясно е, че от своя страна функцията f е обратна на f^{-1} . Затова двете функции се наричат *взаимно обратни*.

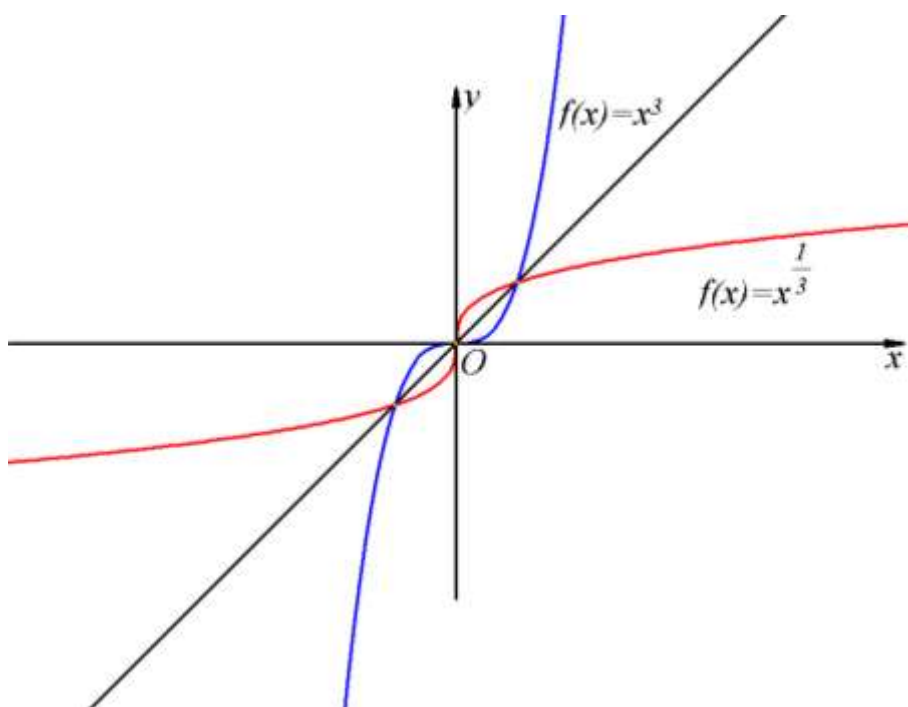
От дефиницията на обратна функция следват свойствата:

$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad x \in Y \quad (1)$$

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in X. \quad (2)$$

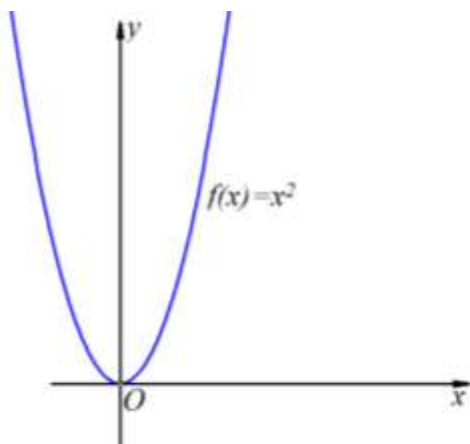


Фиг. 4

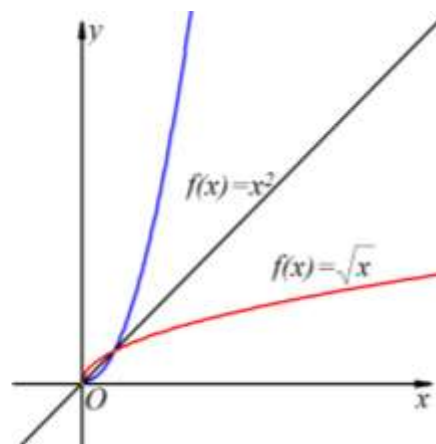


Фиг. 5

Пример 2. Функцията $y = x^2$ е дефинирана при $x \in (-\infty, +\infty)$, но както се вижда от графиката ѝ, показана на фиг. 6, всяка точка от графиката се получава при две различни стойности на аргумента x . Затова търсенето на нейната обратна трябва да се извърши при свиване на дефиниционното ѝ множество до $x \in [0, +\infty)$. В такъв случай обратната функция е $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ и графиките на двете функции изглеждат, както е показано на фиг. 7.

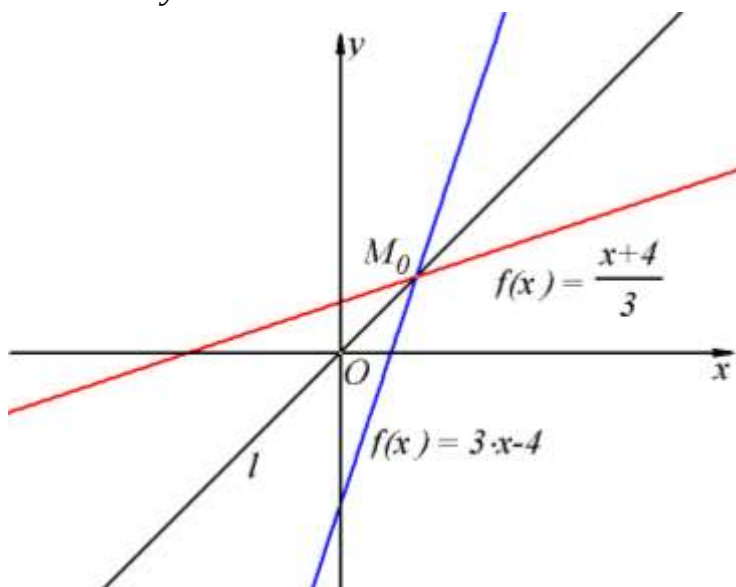


Фиг. 6



Фиг. 7

Всъщност намирането на обратната на някоя функция означава да се реши уравнението $y = f(x)$ по отношение на x и да се получи функция на y . След това се разменят местата на x и y .



Фиг. 8

Пример 3. Да се намери обратната на линейната функция $y = 3x - 4$.

Решение. Решаваме уравнението $y = 3x - 4$ по отношение на x и получаваме $x = \frac{y+4}{3}$. Сега извършваме смяната $x \leftrightarrow y$ и получаваме $y = \frac{x+4}{3}$. Графиките на двете функции са прави, които се пресичат в точка $M_0(2, 2)$ от ъглополовящата l на първи и трети квадрант (Фиг. 8).

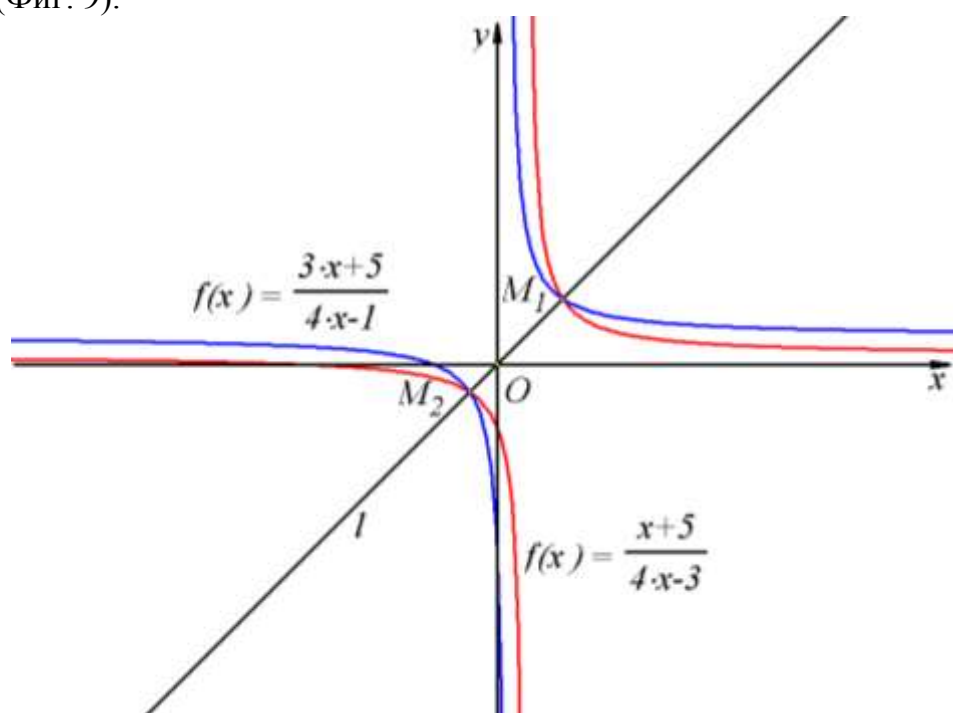
Пример 4. Да се намери обратната на дробно-линейната функция $y = \frac{3x+5}{4x-1}$.

Решение. Решаваме уравнението $y = \frac{3x+5}{4x-1}$ по отношение на x в следната последователност:

$$y = \frac{3x+5}{4x-1} \Rightarrow (4x-1)y = 3x+5 \Rightarrow 4yx - y = 3x+5 \Rightarrow 4yx - 3x = y+5 \Rightarrow$$

$$(4y-3)x = y+5 \Rightarrow x = \frac{y+5}{4y-3} \Rightarrow y = \frac{x+5}{4x-3}.$$

Графиките на двете функции са хиперболи, които се пресичат в точките $M_1\left(\frac{1+\sqrt{6}}{2}, \frac{1+\sqrt{6}}{2}\right)$ и $M_2\left(\frac{1-\sqrt{6}}{2}, \frac{1-\sqrt{6}}{2}\right)$ от ъглополовящата l на първи и трети квадрант (Фиг. 9).



Фиг. 9

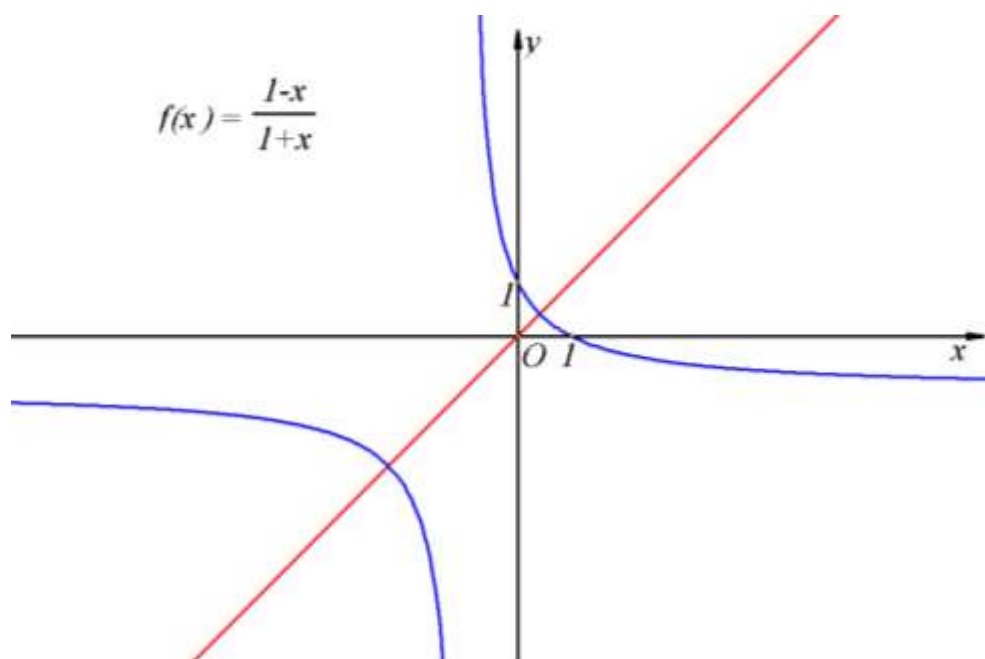
Пример 5. Да се намери обратната на дробно-линейната функция $y = \frac{1-x}{1+x}$.

Решение. Смяната $x \leftrightarrow y$ можем да извършим още в началото и така да получим $x = \frac{1-y}{1+y}$. Решаваме уравнението $x = \frac{1-y}{1+y}$ по отношение на y в следната последователност (както в предишния пример):

$$x = \frac{1-y}{1+y} \Rightarrow (1+y)x = 1-y \Rightarrow x + xy = 1-y \Rightarrow xy + y = 1-x \Rightarrow (x+1)y = 1-x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1-x}{1+x}.$$

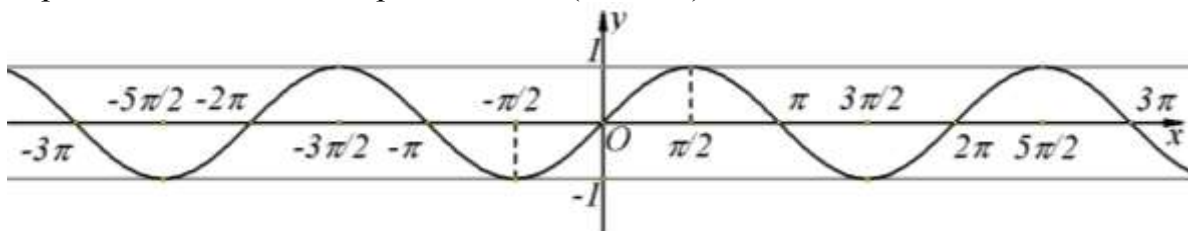
Получената функция $y = \frac{1-x}{1+x}$ съвпада с първоначалната, т.е. функцията е обратна сама на себе си. Затова графиката ѝ е симетрична спрямо ъглополовящата на първи-трети квадрант (Фиг. 10).



Фиг. 10

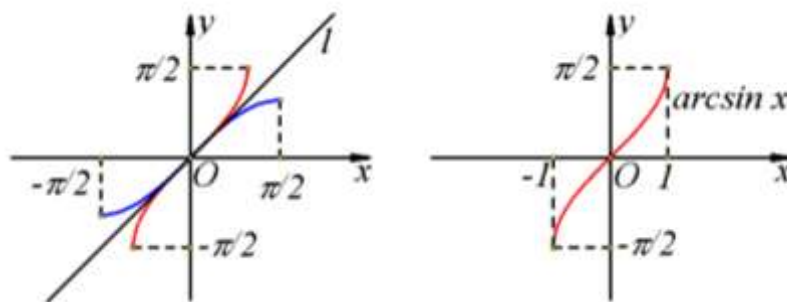
2. Тригонометрични и обратни тригонометрични функции.

2.1. Синус и аркуссинус. Функцията $f(x) = \sin x$ е дефинирана при $x \in (-\infty, +\infty)$, а областта от стойностите ѝ е $y \in [-1, 1]$. Тя е ограничена, нечетна и периодична с основен период $T = 2\pi$ (Фиг. 11).



Фиг. 11

Обратната на $f(x) = \sin x$ не може да се определи при $x \in (-\infty, +\infty)$, тъй като функцията синус приема всяка своя стойност безкраен брой пъти. Затова е необходимо да се свие дефиниционният ѝ интервал, така че в него тя да приема всяка своя стойност точно по един път. Един такъв интервал е $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, в който $\sin x$ приема всичките си стойности от интервала $[-1, 1]$ само по един път (Фиг. 11). Затова обратната на функцията $y = \sin x$ дефинираме, така че, когато $x \in [-1, 1]$, тя да получава онази стойност $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, за която $\sin y = x$ (Фиг. 12). Тази обратна функция се означава с $f(x) = \arcsin x$ и се нарича *аркуссинус* (Фиг. 12).



Фиг. 12

Пример 6. Да се пресметнат стойностите на:

- а) $\arcsin \frac{1}{2}$; б) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. а) Тъй като $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, то $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

б) Тъй като $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

в) Тъй като $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

От свойствата (1) и (2) на взаимно обратните функции следват равенствата:

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1, 1]; \quad (3)$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (4)$$

От графиката на фиг. 12 се вижда, че функцията $f(x) = \arcsin x$ е растяща, ограничена и симетрична спрямо координатното начало, т.е. тя е нечетна. Следователно е изпълнено равенството

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x. \quad (5)$$

Равенството (5) можем да използваме за пресмятане на стойностите на $f(x) = \arcsin x$, когато $x < 0$.

Пример 7. Да се пресметнат стойностите на:

- а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

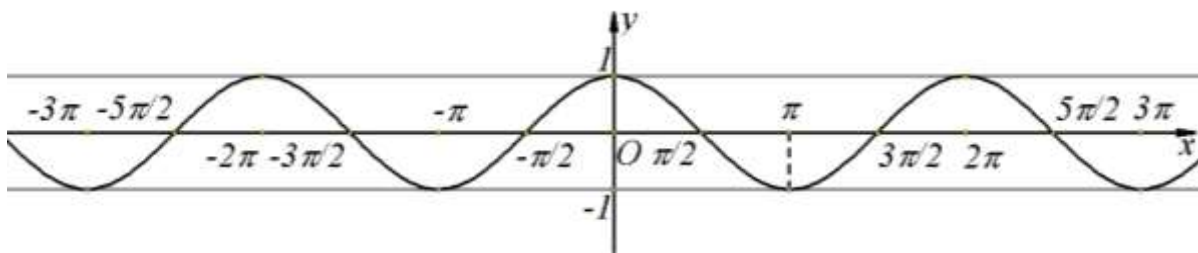
Решение. Като използваме резултатите от пример 6 получаваме съответно:

$$\text{а) } \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6};$$

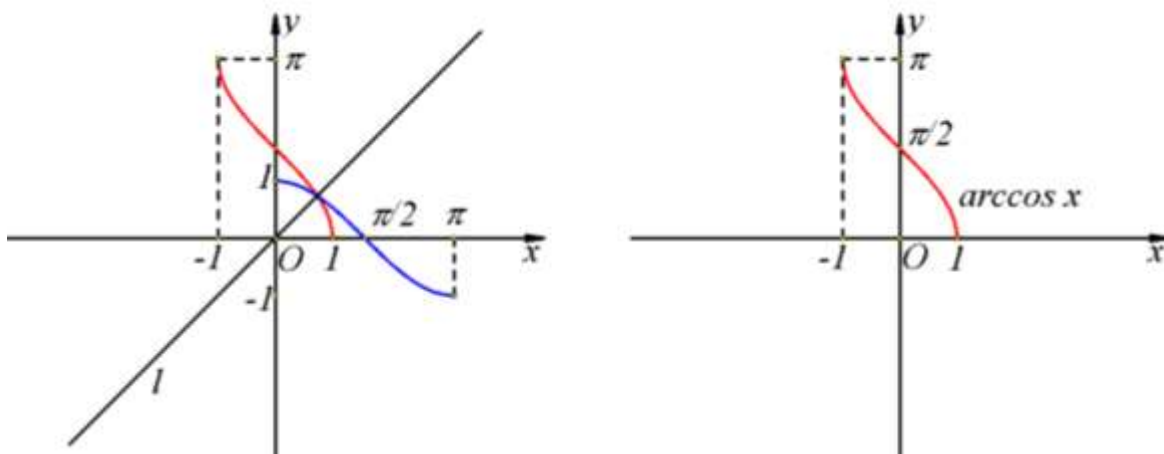
$$\text{б) } \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3};$$

$$\text{в) } \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}.$$

2.2. Косинус и аркускосинус. Функцията $y = \cos x$ е дефинирана при $x \in (-\infty, +\infty)$, а областта от стойностите ѝ е $y \in [-1, 1]$. Тя е ограничена, четна и периодична с основен период $T = 2\pi$ (Фиг. 13).



Фиг. 13



Фиг. 14

Обратната на $f(x) = \cos x$ не може да се определи при $x \in (-\infty, +\infty)$, тъй като функцията косинус приема всяка своя стойност безкраен брой пъти. Затова е необходимо да се свие дефиниционният ѝ интервал, така че в него тя да приема всяка своя стойност точно по един път. Един такъв интервал е $[0, \pi]$, в който $\cos x$ приема всичките си стойности от интервала $[-1, 1]$ само по един път (Фиг. 13). Затова обратната на функцията $y = \cos x$ дефинираме, така че, когато $x \in [-1, 1]$, тя да получава онази стойност $y \in [0, \pi]$, за която $\cos y = x$ (Фиг. 14). Тази обратна функция се означава с $f(x) = \arccos x$ и се нарича *аркускосинус* (Фиг. 14).

Пример 8. Да се пресметнат стойностите на:

- а) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arccos \frac{1}{2}$; в) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. а) Тъй като $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

б) Тъй като $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, то $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

в) Тъй като $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

От свойствата (1) и (2) на взаимно обратните функции следват равенствата:

$$\cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1, 1] \quad (6)$$

$$\arccos(\cos x) = x, \quad x \in [0, \pi]. \quad (7)$$

От графиката на фиг. 14 се вижда, че функцията $f(x) = \arccos x$ е намаляваща, ограничена и симетрична спрямо точката $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Затова е изпълнено равенството

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x. \quad (8)$$

Равенството (8) можем да използваме за пресмятане на стойностите на $f(x) = \arccos x$, когато $x < 0$.

Пример 9. Да се пресметнат стойностите на:

$$\text{а) } \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad \text{б) } \arccos\left(-\frac{1}{2}\right); \quad \text{в) } \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Решение. Като използваме резултатите от пример 8 получаваме съответно:

$$\text{а) } \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6};$$

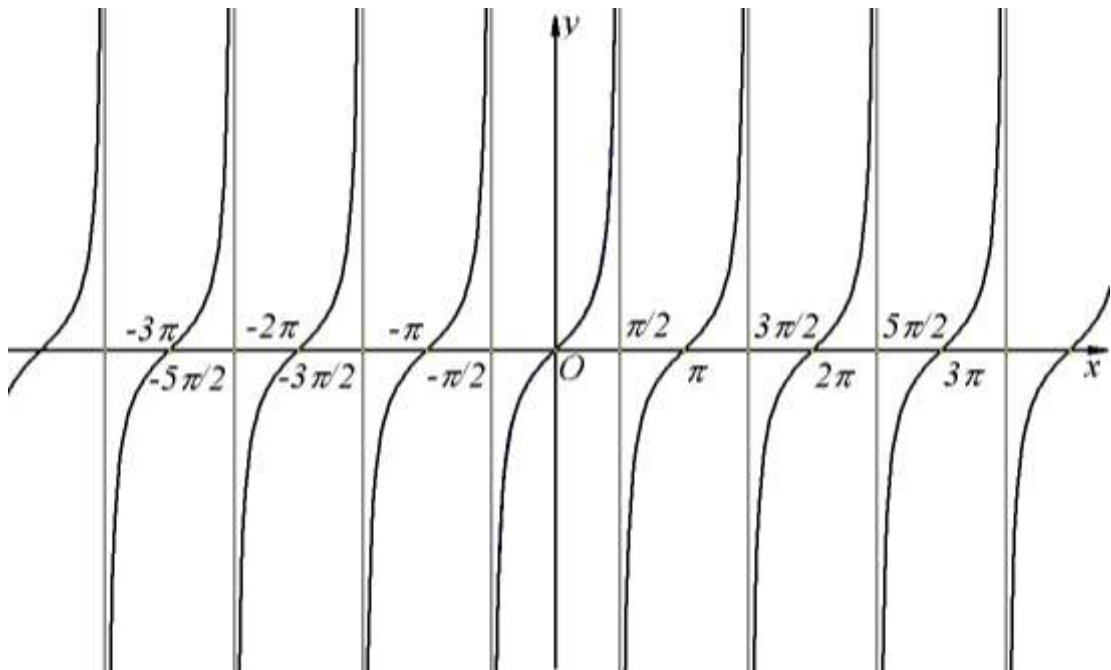
$$\text{б) } \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3};$$

$$\text{в) } \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

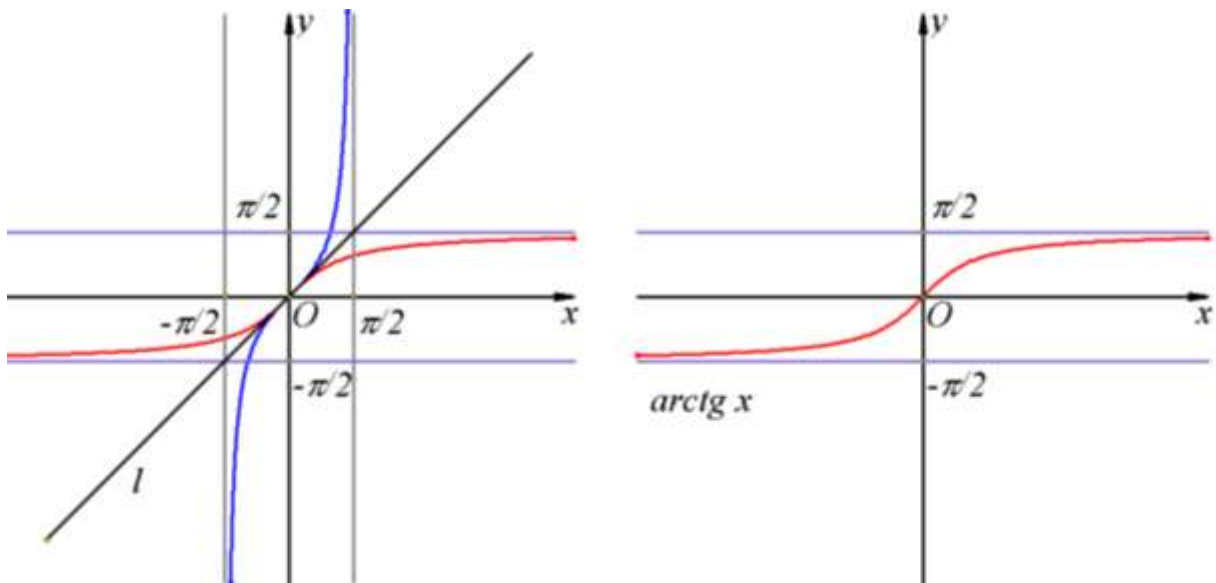
2.3. Тангенс и аркустангенс. Функцията $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ е дефинирана при

$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$, а областта от стойностите ѝ е $y \in (-\infty, +\infty)$. Тя е нечетна, растяща и периодична с основен период $T = \pi$ (Фиг. 15).

Обратната на $f(x) = \operatorname{tg} x$ не може да се определи при $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$, тъй като функцията тангенс приема всяка своя стойност безкраен брой пъти. Затова е необходимо да се свие дефиниционното ѝ множество, така че в него тя да приема всяка своя стойност точно по един път. Един такъв интервал е $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в който $\operatorname{tg} x$ приема всичките си стойности от реалната права $(-\infty, +\infty)$ само по един път (Фиг. 15). Затова обратната на функцията $y = \operatorname{tg} x$ дефинираме, така че, когато $x \in (-\infty, +\infty)$, тя да получава онази стойност $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, за която $\operatorname{tg} y = x$ (Фиг. 16). Тази обратна функция се означава с $f(x) = \operatorname{arctg} x$ и се нарича *аркустангенс* (Фиг. 16).



Фиг. 15



Фиг. 16

Пример 10. Да се пресметнат стойностите на:

а) $\arctg \frac{\sqrt{3}}{3}$;

б) $\arctg \sqrt{3}$;

в) $\arctg 1$.

Решение. а) Тъй като $\tg \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, то $\arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$.

б) Тъй като $\tg \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, то $\arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

в) Тъй като $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, то $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

От свойствата (1) и (2) на взаимно обратните функции следват равенствата:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (9)$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (10)$$

От графиката на фиг. 16 се вижда, че функцията $f(x) = \operatorname{arctg} x$ е растяща, ограничена и симетрична спрямо координатното начало, т.е. тя е нечетна. Следователно е изпълнено равенството

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x. \quad (11)$$

Равенството (11) можем да използваме за пресмятане на стойностите на $f(x) = \operatorname{arctg} x$, когато $x < 0$.

Пример 11. Да се пресметнат стойностите на:

$$\text{а) } \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right); \quad \text{б) } \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}); \quad \text{в) } \operatorname{arctg}(-1).$$

Решение. Като използваме резултатите от пример 10 получаваме съответно:

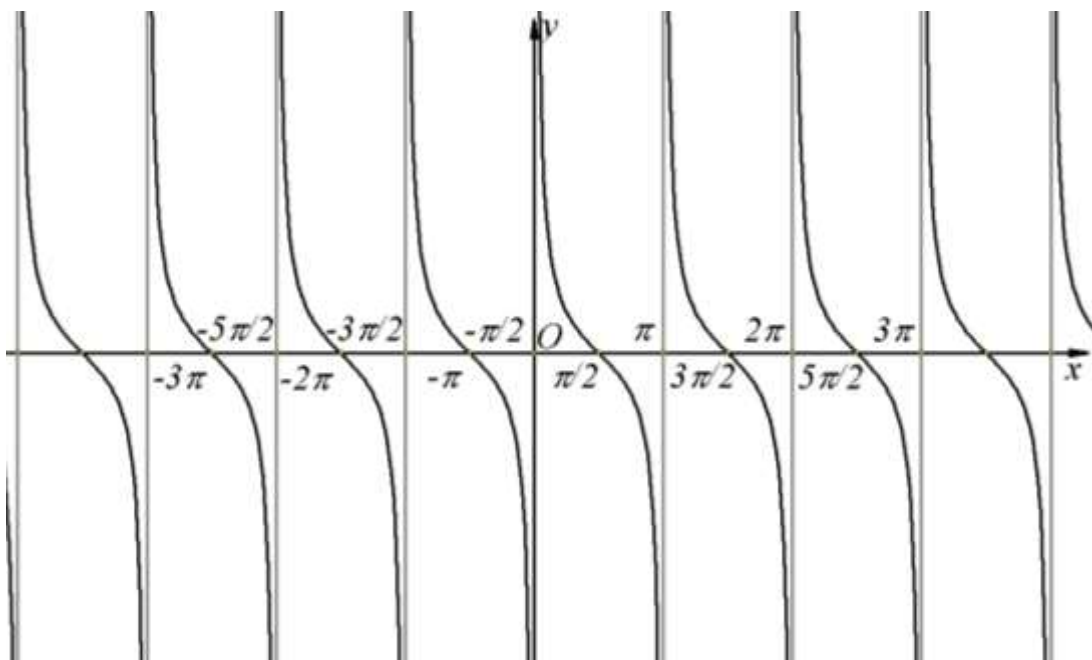
$$\text{а) } \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6};$$

$$\text{б) } \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3};$$

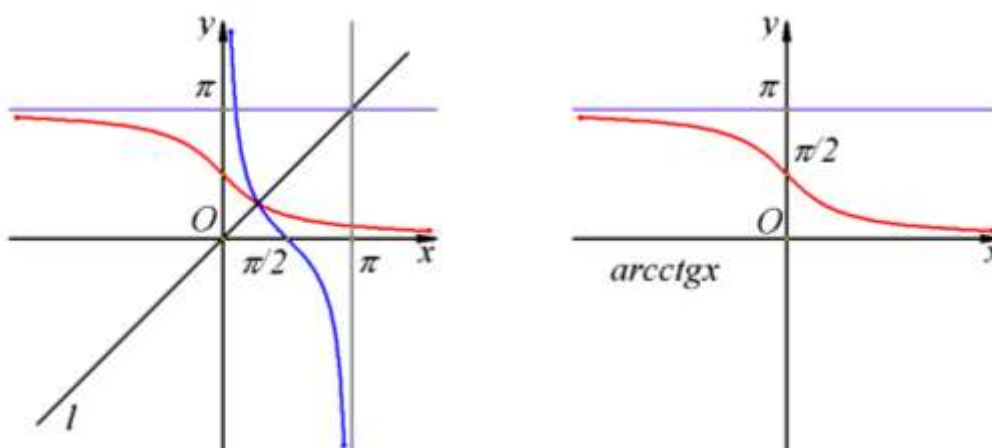
$$\text{в) } \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

2.4. Котангенс и аркускотангенс. Функцията $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ е дефинирана при $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$, а областта от стойностите ѝ е $y \in (-\infty, +\infty)$. Тя е нечетна, намаляваща и периодична с основен период $T = \pi$ (Фиг. 17).

Обратната на $f(x) = \operatorname{ctg} x$ не може да се определи при $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$, тъй като функцията котангенс приема всяка своя стойност безкраен брой пъти. Затова е необходимо да се свие дефиниционното ѝ множество, така че в него тя да приема всяка своя стойност точно по един път. Един такъв интервал е $(0, \pi)$, в който $\operatorname{ctg} x$ приема всичките си стойности от реалната права $(-\infty, +\infty)$ само по един път (Фиг. 17). Затова обратната на функцията $y = \operatorname{ctg} x$ дефинираме, така че, когато $x \in (-\infty, +\infty)$, тя да получава онази стойност $y \in (0, \pi)$, за която $\operatorname{ctg} y = x$ (Фиг. 18). Тази обратна функция се означава с $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ и се нарича *аркускотангенс* (Фиг. 18).



Фиг. 17



Фиг. 18

Пример 12. Да се пресметнат стойностите на:

- а) $\text{arcctg} \sqrt{3}$; б) $\text{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\text{arcctg} 1$.

Решение. а) Тъй като $\text{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, то $\text{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$.

б) Тъй като $\text{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, то $\text{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$.

в) Тъй като $\text{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$, то $\text{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

От свойствата (1) и (2) на взаимно обратните функции следват равенствата:

$$\text{ctg}(\text{arcctg} x) = x, \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (12)$$

$$\text{arcctg}(\text{ctg} x) = x, \quad x \in (0, \pi). \quad (13)$$

От графиката на фиг. 18 се вижда, че функцията $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ е намаляваща, ограничена и симетрична спрямо точката $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Затова е изпълнено равенството

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x. \quad (14)$$

Равенството (14) можем да използваме за пресмятане на стойностите на $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, когато $x < 0$.

Пример 13. Да се пресметнат стойностите на:

а) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$; б) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; в) $\operatorname{arcctg}(-1)$.

Решение. Като използваме резултатите от пример 12 получаваме съответно:

а) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$;

б) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$;

в) $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Chimev, K. (1971). *Obratni trigonometrichni funktsii*. Sofia: Tehnika.
2. Gurskiy, I. (1968). *Funktsii i postroenie grafikov*. Moskva, Prosveshtenie.
3. Manolov, S., Deneva, A., Genov, A., Shopolov, N. (1977). *Matematika. Chast 2*. Sofia, Tehnika.
4. Markushevich, A., Markushevich, L. (1980). *Uvod v teoria na analitichnite funktsii*. Sofia, Nauka i izkustvo.
5. Novoselov, S. (1957). *Obratnye trigonometricheskie funktsii*. Moskva, Sovetskaya nauka.
6. Stewart, J. (2015). *Calculus, Eighth edition*. Boston, USA: Cengage Learning.
7. Waner, S., Costenoble, S. (2023) *Finite Mathematics and Applied Calculus, Eighth edition*. Boston, USA: Cengage Learning.

METHODOLOGICAL ASPECT OF THE PROBLEM OF CONTINUITY OF SCHOOL AND UNIVERSITY MATHEMATICAL EDUCATION

Full Professor Maria Shabanova, DrSci

Northern (Arctic) Federal University named after M.V.Lomonosov, RUSSIA

Associate professor Larisa Udovenko, PhD

Moscow Pedagogical State University, Private educational institution of higher education Saint Tikhon's Orthodox University for the Humanities, RUSSIA

Abstract: *The unresolved problem of continuity of school and university mathematical education is one of the reasons for the expulsion of students from the first courses of those areas of training that provide for the continuation of mathematical education. The complexity of solving this problem is related to its complex nature: the difference in the requirements for the level of mathematics of graduates of secondary schools and university students, the rupture of meaningful links between school and university mathematics courses, the change in the form of the organization of the educational process. The article highlights and reveals another aspect of this problem – the methodological one. The authors present the theoretical foundations and an example of creating methodological conditions that facilitate the student's transition from one form of educational cognition to another.*

Keywords: *Athematical education at the university; The problem of continuity; Methodological aspect*

JEL code: C00

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ПРОБЛЕМЫ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ ШКОЛЬНОГО И ВУЗОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Профессор, д.п.н., Мария Шабанова

Северный (Арктический) федеральный институт имени М.В.Ломоносова, Россия

Доцент, к.п.н., Лариса Удовенко

*Московский Педагогический государственный университет,
Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Россия*

Проблема преемственности школьного и вузовского математического образования с философской точки зрения представляет собой нарушение диалектического закона «отрицания отрицания» в системе «школа- вуз».

Изучению сущности этой проблемы посвящены многочисленные экспериментальные исследования, проводимые по инициативе математических кафедр вузов, а также в рамках индивидуальных исследований при подготовке докторских и кандидатских диссертаций.

Исследователями выделяются несколько аспектов данной проблемы:

– разница в требованиях к уровням математической подготовки выпускников средних общеобразовательных школ и к студентам первого курса, где для первых требования задаются ФГОС СОО (Министерство образования и науки Российской Федерации, 2022), а для вторых определяются содержанием вузовских

математических курсов;

– различия в способах организации учебного процесса в школе и в вузе: переход от классно-урочной системы проведения учебных занятий к лекционно-семинарской, резкое повышение доли самостоятельной учебной работы, снижение контроля за результатами учебного труда и др.;

– разрыв содержательных связей между вузовским и школьным курсами математики.

Устранение этих разрывов в системе российского математического образования осуществляется за счет: отказа от проведения выпускных и вступительных экзаменов по математике соответственно в школе и в вузе и заменой их Единым государственным экзаменом по математике профильного уровня (с 2004 года по настоящее время); развития практики использования лекционно-семинарской системы на старшей ступени общего образования с приглашением для чтения научно-популярных лекций вузовских преподавателей математики, включением в программу подготовки учащихся профильных классов спецкурсов, реализуемых на базе университетов – партнеров; пропедевтического изучения в школе элементов высшей математики (с 1960 года (Марнянский, 1964: 3) в школьный курс математики включены элементы математического анализа, с 2004 года в обязательный минимум программ по математике включены элементы теории вероятностей, комбинаторики и математической статистики (Министерство образования и науки Российской Федерации, 2017: 66).

Помимо вышеперечисленных аспектов преемственности школьного и вузовского математического образования важно учесть и методологический аспект, который обращает нас к проблеме методологической преемственности.

Под проблемой методологической преемственности школьного и вузовского математического образования мы будем понимать отсутствие методических условий, способствующих постепенному («безболезненному») замещению одной формы учебного познания, свойственной школьному изучению математики, другой формой познания, предъявляемой вузом.

Для процесса изучения математики в основной и старшей общеобразовательной школе характерна *метаэмпирическая форма учебного познания с элементами дедукции*, характеризующаяся частичной аксиоматизацией, преобладанием понятий модельной природы, а для базовых вузовских курсов математики – *квазиэмпирическая форма*, характеризующаяся глобальной аксиоматизацией, многоуровневыми математическими абстракциями, изоморфными и гомоморфными связями изучаемых математических теорий.

В исследовании Т. Куна (2003) подробно описан процесс перехода от одной формы научного познания к другой. Для обозначения связанной с этим проблемы Т. Кун ввел понятие парадигмального кризиса, понимая под парадигмой научного знания систему устойчивых, стабильных, понятных всем специалистам данной научной области и принятых ими знаний, которые служат теоретической и идейной основой научных исследований, а также систему образцов решения научных проблем.

Носителем парадигмальных знаний, по его мнению, является научное сообщество – объединение ученых, разрабатывающих сходные проблемы. Появление научных знаний, результатов исследований, выходящих за рамки парадигмальных ожиданий, порождают, в терминологии Т. Куна, *аномальные*

ситуации или просто аномалии.

Заметим, что по мнению Т. Куна «Изучение парадигм является тем, что главным образом и подготавливает студента к членству в том или ином научном сообществе» (Кун, 2003: 29).

Примерный перечень аномальных учебных ситуаций, которые подлежат разбору для облегчения студентам перехода от метаэмпирической формы познания с элементами дедукции в школе к квазиэмпирической форме познания в вузе представлены в таблице 1.

Таблица 1

Примерный перечень учебных аномальных ситуаций

Аномальные учебные ситуации	Реакции неподготовленных студентов на появление аномальных учебных ситуаций
<i>I. Аномальные учебные ситуации, вызванные нарушением непосредственной связи математического знания с реальностью</i>	
1.1. Обнаружение относительной независимости истинностной оценки математических утверждений от их смыслового значения	Отказ от оценки истинностного значения высказываний через истинностную оценку атомарных высказываний и использование определений логических понятий. Подмена оценкой истинностного значения через осмысление содержания высказываний. Невозможность осмысления содержания высказывания приводит к отказу от выполнения задания или к действиям наугад. Отказ от использования тех научных данных об истинностном значении высказываний, которые не подтверждаются оценкой их смыслового значения
1.2. Необходимость обоснования существования математических объектов, удовлетворяющих определению математического понятия	Трудности вскрытия причин софизмов, основанных на противоречивости данных. Опускание теорем о существовании при воспроизведении теории, а также отказ от их использования в качестве теоретической базы решения задач. Подмена доказательства существования математических объектов обоснованием существования их реальных прообразов
1.3. Обнаружение несоответствия результатов логического познания результатам эмпирического познания	Использование в качестве теоретической базы рассуждений знаний (правил), полученных в результате чувственного восприятия действительности, даже при наличии противоречащих им научных фактов (альтернативных правил)
1.4. Необходимость проведения логических рассуждений о математических понятиях, не подкреплённых чувственным образом	Подмена дедуктивных рассуждений об объектах, не имеющих чувственного образа, индуктивными (подмена доказательства примерами ситуаций). Потеря ориентировки (направления) в процессе осуществления логических рассуждений с

	участием математических объектов, которые не подкреплены чувственным образом
1.5. Необходимость варьирования образа математического объекта: класс эквивалентности или его представитель	Невозможность проведения рассуждений, требующих отказа от восприятия класса эквивалентности как конкретного овеществленного объекта. Отказ от распространения на математические объекты понятий, требующих его осмысления как класса эквивалентности
1.6. Необходимость варьирования критериев успешности решения задачи в зависимости от внешних условий ее постановки. (Потенциально и актуально разрешимые задачи; условная, позиционная, метрическая разрешимость и т.п.)	Использование в качестве критериев успешности математической деятельности учительских требований, закрепленных в опыте. Невозможность изменения критериев успешности при изменении условий осуществления деятельности. Отказ от использования результатов математической деятельности, не соответствующих субъективным критериям успешности
II. Аномальные учебные ситуации, вызванные иерархизацией предметных областей математической науки	
2.1. Необходимость переосмысления ранее известных математических понятий с точки зрения новых, более общих понятий	Подмена содержательного описания свойства абстрактного математического понятия свойствами его содержательных моделей. Полный перенос свойств содержательных моделей абстрактного понятия на само это понятие. Переход от рассуждений об абстрактных понятиях к рассуждениям об его содержательных моделях
2.2. Обнаружение возможности сопоставления содержательно далеких математических понятий	Трудности иллюстрации абстрактных математических понятий содержательными моделями, относящимися к различным математическим теориям. Невозможность выделения свойств, с точки зрения которых содержательно далекие математические понятия являются сопоставимыми. Отказ от отождествления содержательно далеких математических понятий в рамках абстрактной математической теории
2.3. Возможность самоприменимости математических понятий	Трудность определения содержательного смысла высказываний, связанных с самоприменимостью понятий. Отказ от использования математических утверждений, основанных или являющихся результатом самоприменимости понятий

III. Аномальные учебные ситуации, связанные с выявлением логической структуры математических утверждений и математической теории	
3.1. Необходимость изменения логической структуры математических утверждений в процессе их обоснования, использования, а также получения на их основе новых утверждений	Трудность выделения логической структуры сложных высказываний и предикатов. Отказ от использования методов, основанных на изменении логической структуры высказываний. Отказ от опоры на те утверждения, логическая структура которых не соответствует цели использования без попыток внесения изменений в их логическую структуру
3.2. Обнаружение факта зависимости истинностного значения утверждения от его логической структуры	Неумение осуществлять оценку области истинности и области задания сложного предиката по знанию области истинности и области задания его атомов
IV. Аномальные учебные ситуации, связанные с интеграцией понятийного аппарата математической науки	
4.1. Необходимость варьирования образа (трактовки) математического понятия в зависимости от ситуации использования	Трудности при осуществлении деятельности, связанной с комплексным использованием нескольких образов (трактовок) одного математического объекта (понятия). Невозможность адаптации образа (трактовки) математического объекта (понятия) к условиям оперирования с ним
4.2. Обнаружение нетождественности языковой (символьной) формы математического объекта самому объекту	Трудности, связанные с изменением формы описания (способа задания) математического объекта. Невозможность проведения рассуждений о математическом объекте, заданном в форме, для которой не установлены необходимые правила оперирования. Трудности распознавания в математических объектах понятий, заданных в вырожденной форме. Восприятие одних и тех же математических понятий, обозначенных разными терминами или символами, как различных, не связанных понятий

Практика показывает, что далеко не все студенты могут сами найти выход из этих ситуаций, поскольку их разрешение требует принятия новых методологических установок на основе рефлексивного анализа довольно большого количества познавательных актов.

Нами установлено, что при проектировании методических условий, помогающих студенту найти выход из аномальной ситуации, необходимо исходить из структуры элементарного акта методологической преемственности, представленной рисунками 1, 2 и 3.

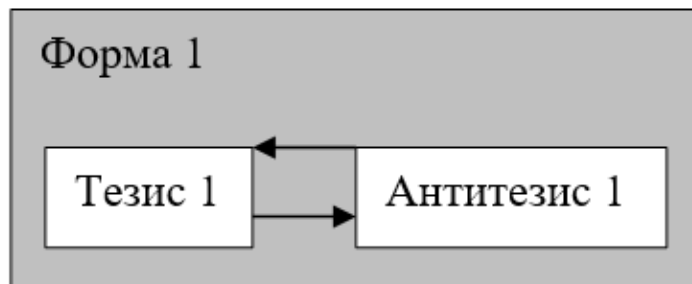


Рис.1. Возникновение аномальной ситуации (неразрешимого противоречия между парадигмальным ожиданием и научным фактом) в рамках действующей формы познания

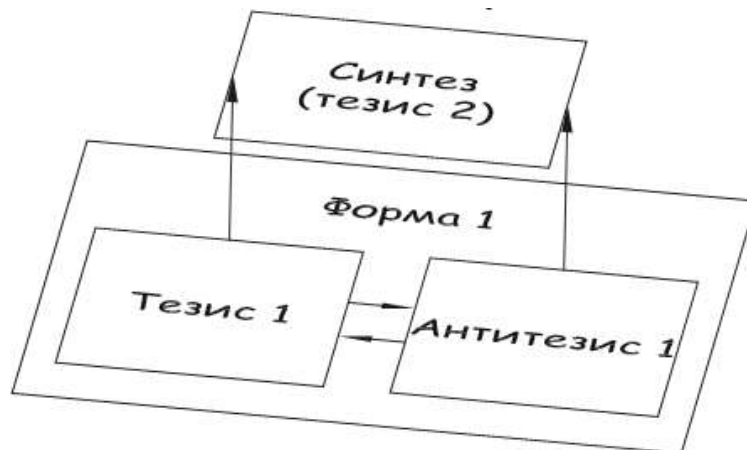


Рис. 2. Разрешение противоречия, лежащего в основе аномальной ситуации, за счет выхода за пределы этой формы познания

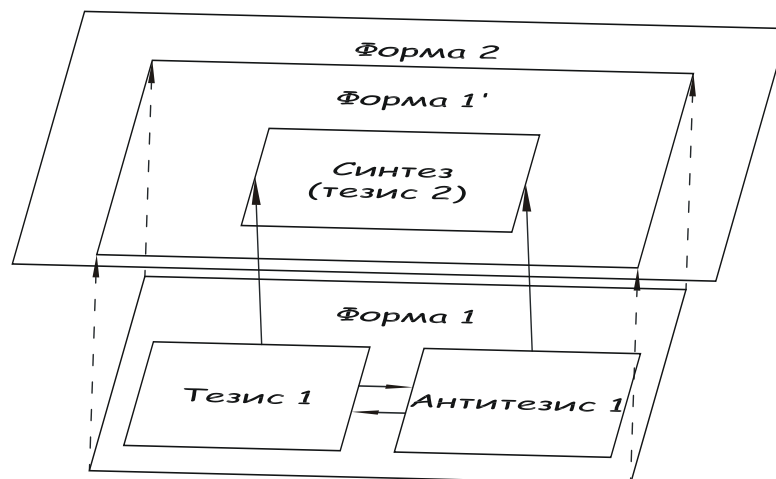


Рис. 3. Проецирование старой формы познания на новую

Рассмотрим в качестве примера методических условий, помогающих студенту найти выход из аномальной ситуации, серию задач на применение *теоремы о предельном переходе*.

Пусть даны три функции: $y = \varphi(x)$; $y = f(x)$ и $y = g(x)$ такие, что для всех $x > x_0$ справедливо неравенство $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$.

Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = a$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = a$. (1)

Эта теорема может быть сформулирована и для $x \rightarrow -\infty$, и для $x \rightarrow x_0$.

В России и Болгарии данную теорему часто называют теоремой «о двух милиционерах».

Задача 1 (нормальная ситуация). Найдите пределы функций с использованием теоремы о предельном переходе:

а) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \sin^3 x)$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 5} - \sqrt{x^2 + 2})$.

Задача 2 (аномальная ситуация). Пусть положительная функция f возрастает на $[0; +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$. Докажите, пользуясь теоремой о предельном переходе, что

для любого $c > 0$ справедливо $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$.

Главным отличием задачи 1 от задачи 2 является разное представление функции. Задание функций формулами в задаче 1 соответствует метаэмпирической форме познания с элементами дедукции, которая сформирована у студентов первого курса при изучении математики на ступени основного и среднего общего образования. Формулы позволяют создать чувственный образ рассматриваемых функций, подкрепить и проверить правильность рассуждений, опираясь на графические представления рассматриваемых зависимостей, знания свойств элементарных функций, правила тождественных преобразований. Если не стоит специальная задача исследования свойств функции для построения её графика, допустимо обращение в подобных ситуациях к помощи графических калькуляторов (например, к Desmos или GeoGebra).

Графики функций из задачи 1 представлены на рисунках 4 и 5.

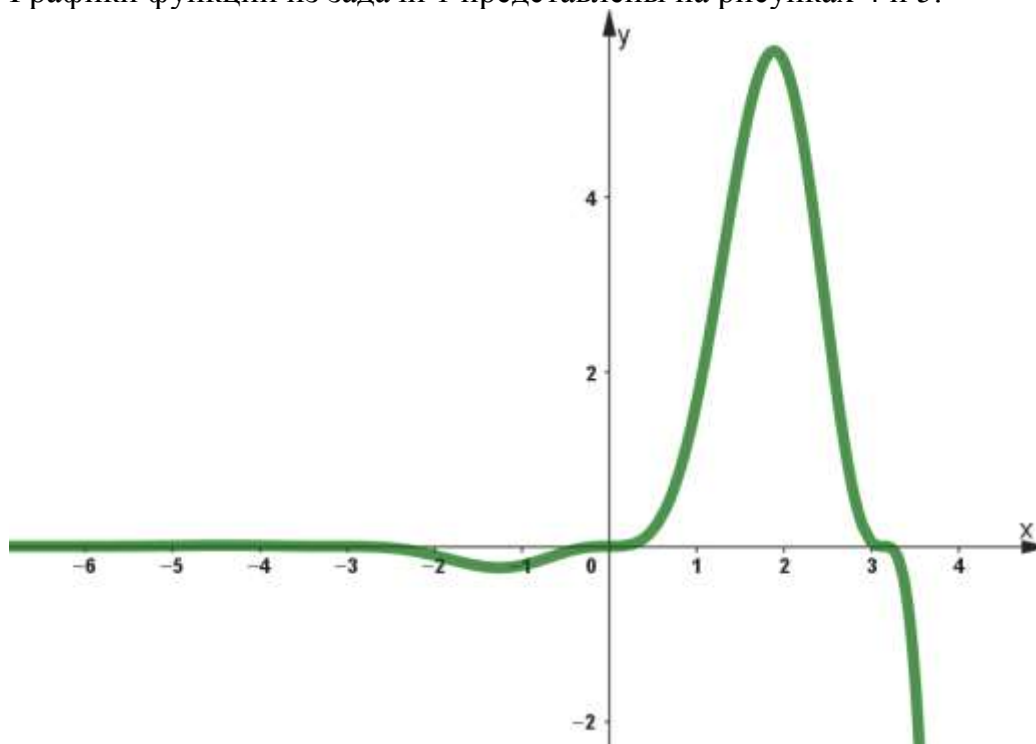


Рис. 4. График функции $y = e^x \cdot \sin^3 x$

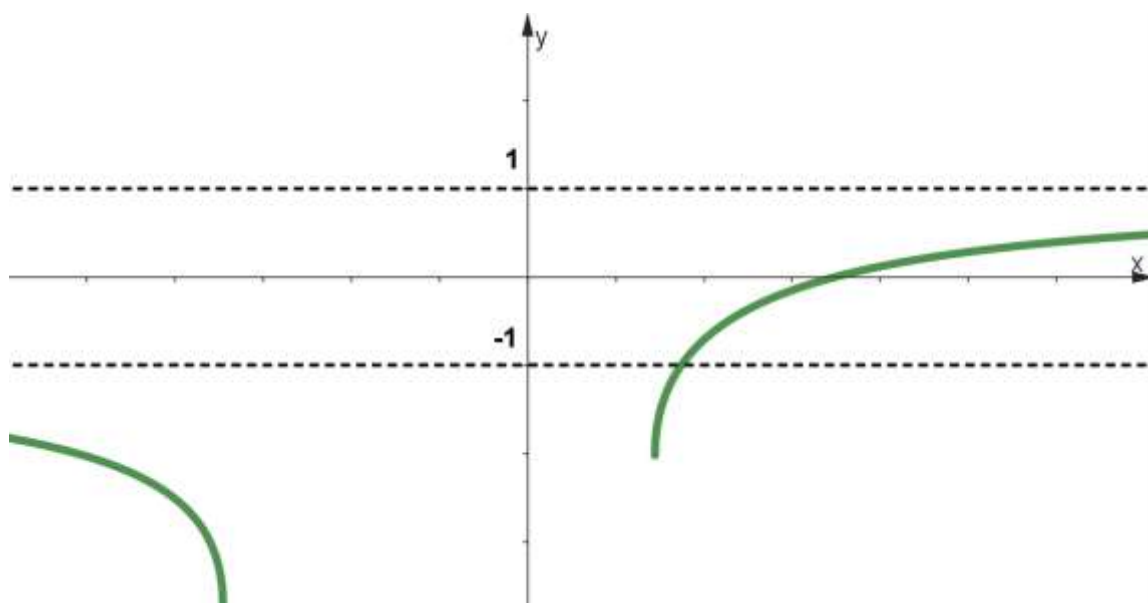


Рис. 4. График функции $y = \sqrt{x^2 + 2x - 5} - \sqrt{x^2 + 2}$

Решение задачи 1а в части подбора «сжимающих» функций полностью опирается на знания, полученные студентами при изучении математики в школе. Им известно, что $-1 \leq \sin x \leq 1$, $y = t^3$ – определенная на множестве действительных чисел возрастающая функция, следовательно, $-1 \leq \sin^3 x \leq 1$. Функция $y = e^x$ принимает только положительные значения, следовательно, $-e^x \leq e^x \cdot \sin^3 x \leq e^x$. Знания свойств показательной функции $y = e^x$ и правил преобразования графиков функций дают возможность получить вывод о том, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0$. Тогда по теореме о предельном переходе $0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \sin^3 x \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ можно сделать вывод: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \sin^3 x = 0$.

Решение задачи 1б, как правило, сразу же начинается с попытки избавиться от иррациональности, что приводит к такому результату:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 5} - \sqrt{x^2 + 2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-5}+\sqrt{x^2+2}}.$$

Поиск ограничений для получившейся функции требует от студентов не только знания свойств элементарных функций, но и умения провести сравнение и оценку значений этих функций. Этому учат в школе. Однако в данном случае необходимо создать «чувственный образ» функции при задаваемых значениях аргумента

$x = +\infty$, что в некотором смысле даёт основу для формирования у студентов квазиэмпирической формы познания. Итак, проведем оценку полученной функции

$$f(x) = \frac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-5}+\sqrt{x^2+2}} \text{ слева и справа при } x = +\infty.$$

Оценка слева:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 5 &> x^2 \text{ (для } x \rightarrow +\infty) \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 5} > x; \\ x^2 + 2 &> x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2} > x. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \left. \begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x - 5} &> x \\ \sqrt{x^2 + 2} &> x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 5} + \sqrt{x^2 + 2} > 2x.$$

$$\text{Учитывая } 2x - 7 < 2x, \text{ можно говорить о том, что } \frac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-5}+\sqrt{x^2+2}} < 1.$$

Оценка справа. Сначала оценим знаменатель:

$$x^2 + 2x - 5 = x^2 + 2x + 1 - 6 = (x + 1)^2 - 6 < (x + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 5} < x + 1;$$

$$x^2 + 2 < x^2 + 2x + 1 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2} < x + 1.$$

Тогда
$$\left. \begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x - 5} < x + 1 \\ \sqrt{x^2 + 2} < x + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 5} + \sqrt{x^2 + 2} < 2x + 2.$$

Опираясь на умения сравнивать значения обыкновенных дробей получаем

$$\frac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-5}+\sqrt{x^2+2}} > \frac{2x-7}{2x+2} = \frac{2x+2-9}{2x+2} = 1 - \frac{9}{2x+2}$$

и переходим к рассмотрению неравенства
$$\frac{2x-7}{2x+2} < \frac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-5}+\sqrt{x^2+2}} < 1.$$

Сделать окончательный вывод позволяет теорема о предельном переходе:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{9}{2x+2}\right) < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-5}+\sqrt{x^2+2}} < \lim_{x \rightarrow +\infty} 1;$$

$$1 < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-5}+\sqrt{x^2+2}} < 1.$$

Получаем
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 5} - \sqrt{x^2 + 2}) = 1.$$

Отсутствие в формулировке задачи 2 данных о формуле, задающей функцию $y = f(x)$, является аномальной ситуацией для студентов, так как придется действовать в отсутствии чувственного образа.

Чаще всего, студенты оказываются ограниченными рамками действующей формы познания. Испытывая потребность в установлении конкретной функции – «чувственного образа», они пытаются сконструировать пример функции, удовлетворяющей условиям задачи, и затем использовать его для доказательства. Предлагаем им предоставить такую возможность. Вскоре они сами откажутся от этой идеи по одному или обоим соображениям: 1) попытки сконструировать функцию оказались неудачными; 2) доказательство, проведенное для сконструированной функции, является всего лишь доказательством частного случая, и не гарантирует справедливости утверждения для всех функций, удовлетворяющих условию задачи.

Остановка деятельности является условием выхода за пределы, задаваемые действующей формой познания. Помощь преподавателя оказывается самой действенной именно в этот момент. Первое, что нужно сделать, помочь студентам осознать причины возникших затруднений. Предложить им сконцентрировать внимание на поиске ограничивающих функций для её аргумента.

Так как $c > 0$, то для любого его значения найдется $k \in \mathbb{Z}$ такое, что справедливо двойное неравенство: $2^k \leq c < 2^{k+1}$. Так как мы рассматриваем только $x > 0$, то справедливо $2^k x \leq cx < 2^{k+1} x$.

В силу возрастания $f(x)$ имеем: $f(2^k x) \leq f(cx) \leq f(2^{k+1} x)$.

Из условия $f(x) > 0$:
$$\frac{f(2^k x)}{f(x)} \leq \frac{f(cx)}{f(x)} \leq \frac{f(2^{k+1} x)}{f(x)}.$$

По теореме о предельном переходе (1) получаем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2^k x)}{f(x)} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2^{k+1} x)}{f(x)}.$$

(2)

Найдем
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2^k x)}{f(x)} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2^{k+1} x)}{f(x)}.$$

Для этого представим
$$\frac{f(2^k x)}{f(x)}$$
 в виде:

$$\frac{f(2^k x)}{f(x)} = \frac{f(2^k x)}{f(x)} \cdot \frac{f(2^{k-1} x)}{f(2^{k-1} x)} = \frac{f(2^{k-1} x)}{f(x)} \cdot \frac{f(2^{k-2} x)}{f(2^{k-2} x)} = \dots = \frac{f(2^2 x)}{f(x)} \cdot \frac{f(2x)}{f(2x)} = \frac{f(2x)}{f(x)}$$

Аналогично, $\frac{f(2^{k+1} x)}{f(x)} = \frac{f(2x)}{f(x)}$. Тогда, $\frac{f(2^{k+1} x)}{f(x)} = \frac{f(2^k x)}{f(x)} = \frac{f(2x)}{f(x)}$.

Учитывая условие задачи $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2^k x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2^{k+1} x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$.

С учетом (2) получаем: $1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2^k x)}{f(x)} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2^{k+1} x)}{f(x)} = 1$.

Итак, в заданных условиях имеем $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$, что и требовалось доказать.

После приведённого доказательства полезно вновь вернуться к конструированию конкретной функции, удовлетворяющей условиям задачи. Например, это может быть функция $f(x) = \ln^2 x$ или более широкий класс функций $f(x) = \ln^\alpha x$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Для комплексного решения проблем, связанных с переходом к новой форме познания, характерной для базовых вузовских курсов математики, в учебные планы вузов часто включают подготовительный курс «Введение в математику». В программу данного курса (Шабанова и др., 2008) входят логические и теоретико-множественные основы математики, элементарные функции одной действительной переменной, элементы теории равносильности уравнений и неравенств. Здесь, в частности, имеется большая подборка задач, которая готовит начинающих студентов к встрече с аномальными ситуациями, подобными рассмотренной.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ministerstvo obrazovaniya Rossiyskoy Federatsii (2017) Federalnyy komponent gosudarstvennogo standarta obshchego obrazovaniya // Priказ Ministerstva obrazovaniya Rossiyskoy Federatsii ot 05.03.2004 g. № 1087 red. ot 07.06.2017 g.) «Ob utverzhdenii federal'nogo komponenta gosudarstvennykh obrazovatel'nykh standartov nachalnogo obshchego, osnovnogo obshchego i srednego (polnogo) obshchego obrazovaniya», 286 s.: <https://gos-ooo-2004-g.pdf> (my1.ru).
2. Marnyanskiy, I.A. (1964) *Elementy matematicheskogo analiza v shkol'nom kurse matematiki: posobie dlya uchitelya*. Moskva: Prosveshchenie, 144 s.
3. Kun, T. (2003) *Struktura nauchnykh revolyutsiy* [Ruskiy yaz.], Sost. V. Yu. Kuznetsov; Per. s angl. I. Z. Naletova i dr. Moskva, AST, 606 s.
4. Ministerstvo obrazovaniya Rossiyskoy Federatsii (2022) O vnesenii izmeneniy v federalnyy gosudarstvennyy obrazovatel'nyy standart srednego obshchego obrazovaniya, utverzhdennyy prikazom Ministerstva obrazovaniya i nauki Rossiyskoy Federatsii ot 17 maya 2012 g. № 413 // Priказ Ministerstva prosveshcheniya Rossiyskoy Federatsii ot 12.08.2022 g. № 732: <https://edsoo.ru/normativnye-dokumenty/>
5. Shabanova, M.V., Kotova, S.N., Popov, I.N., Bezumova, O.L. (2008) *Vvedenie v matematiku: uchebnoe posobie*. Arhangel'skiy, Pomorskiiy universitet, 203 s.

ON EXPERIMENTAL STUDY OF NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES WITHIN TRAINING TEACHERS

Full Professor Alexander Yastrebov, DrSci

Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D.Ushinski, RUSSIA

Abstract. *A set of computer instruments, created by the author within dynamic geometry system GeoGebra, is described. Some special methods of using these instruments are proposed. The instruments help students to create dynamic drawings within the model by Cayley–Klein for discovering some theorems of Lobachevskian geometry.*

Keywords: *Dynamic geometry system; Experimental study; Instrument; Lobachevskian geometry; Model by Cayley–Klein.*

JEL code: C00

ОБ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ ИЗУЧЕНИИ НЕЕВКЛИДОВЫХ ГЕОМЕТРИЙ В ПРОЦЕССЕ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЕЙ

Профессор Александр Ястребов, доктор педагогических наук

Ярославский гос. педагогический университет им. К.Д. Ушинского, РОССИЯ

Одна из традиций подготовки учителей математики в России состоит в том, что ее геометрическому компоненту уделяется серьезное внимание. Об этом говорит тот факт, что курс геометрии изучается в течение четырех лет. Об этом же говорит один из элементов планирования курса – целый семестр посвящен изучению оснований геометрии. В нем подробно рассматривается аксиоматический метод построения математической теории, особенности применения этого метода в геометрии, несколько аксиоматик евклидовой геометрии, некоторые примеры неевклидовых геометрий. Среди примеров неевклидовых геометрий особое место занимает геометрия Лобачевского, и причин тому две: особая роль этой геометрии в развитии математики и исторический факт ее изобретения в России. В настоящей статье пойдет речь об изучении геометрии Лобачевского экспериментальным методом.

Известно, что создание евклидовой геометрии, равно как и ее последующее изучение, неразрывно связано с чертежами. Студенту доступны канонические циркуль и линейка, двусторонняя линейка, угольник, шаблон прямого угла, масштабная линейка, транспортир... Панель инструментов системы динамической математики (СДМ) GeoGebra содержит 71 инструмент и предусматривает возможность создания новых инструментов. Такое богатство позволяет студенту проводить разнотипные эксперименты с математическими объектами с целью обнаружения неизвестных ему свойств, проверки возникающих гипотез и т.д.

Парадоксально, но с переходом к геометрии Лобачевского ситуация радикально меняется! Чертежные инструменты исчезают, новые факты возникают как результат чисто умственных, логических действий, а чертежи становятся условными. Достаточно вспомнить каноническое изображение четырехугольника Саккери, на котором две его стороны изображаются в виде отрезков прямой, а две другие стороны – в виде искривленных линий (рис. 0). Автор не встречал в литературе никаких указаний на природу этих кривых.

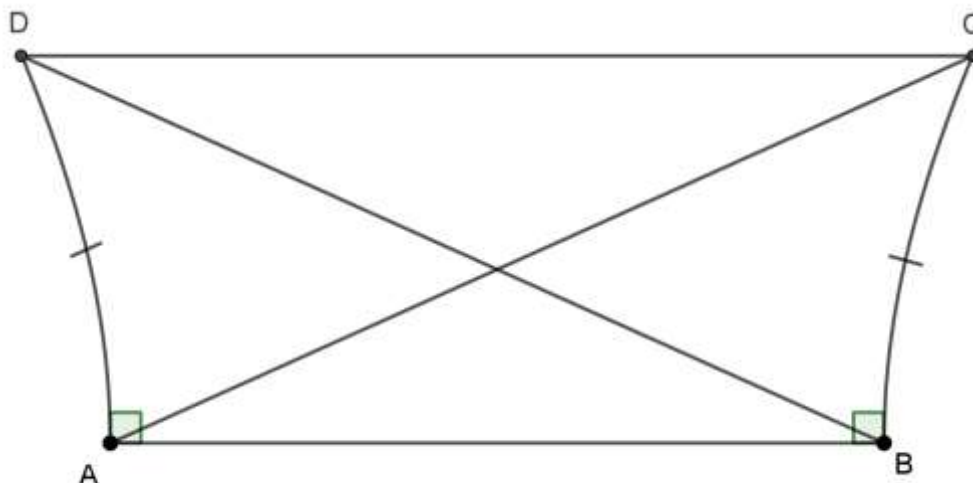


Рис. 0. Четырехугольник Саккери

Их нет ни в классической и полной монографии (Каган, 1956), ни в официальном двухтомном учебнике для педагогических вузов (Базылев, 1975), ни в подробнейшей книге для учащихся (Атанасян, 2001). В результате «никому» неизвестно, будут ли эти стороны фрагментами экспонент, или синусоид, или окружностей, или гипербол...

В этих условиях была предпринята попытка создания системы инструментов для СДМ GeoGebra, которая позволила бы проводить основные построения на модели Кэли–Клейна геометрии Лобачевского. Математические свойства этих инструментов обсуждались в работах (Ястребов и Кошелева, 2019; Ястребов, 2020). В данной статье мы сосредоточимся на описании той методики их использования, которая была применена автором в процессе преподавания курса геометрии.

Перечень инструментов является естественным, неизбежным и потому банальным. Прежде всего, это инструменты, предназначенные для построения основных объектов геометрии: **Прямая, Луч, Отрезок**. Кроме того, это инструменты, связанные с параллельностью прямых: **Параллельная прямая** и **Луч, параллельный данному**. Четыре следующих инструмента связаны с перпендикулярностью: **Перпендикуляр к прямой, Перпендикуляр к лучу, Перпендикуляр к отрезку, Серединный перпендикуляр**. Два инструмента связаны с идеей срединности: **Середина, Биссектриса**. Наконец, два инструмента связаны с измерениями: **Расстояние, Мера угла**.

Стартовые знания студента о геометрии Лобачевского сознательно могут быть сделаны весьма ограниченными. Во-первых, это краткий очерк истории ее возникновения. Во-вторых, это всего лишь одно, базовое соглашение: точки геометрии Лобачевского – это все точки открытого круга радиуса 1. Остальные объекты студенту предстоит построить (а свойства объектов выявить) в процессе использования перечисленных инструментов.

Окружность изучаемого круга для краткости будем называть абсолютом.

Предложим серию заданий, каждое из которых будет сопровождаться двумя пассажами: обсуждением и рефлексией. Первый из них посвящен математическому решению, а второй – психологическому воздействию на студента самого процесса решения.

Задание 1. Каков геометрический смысл точки на абсолюте?

Обсуждение. Парадоксально, но ответ на вопрос вытекает из правила чтения ... географических карт. Если не оговорено противное, то верхняя граница прямоугольной карты соответствует направлению на север, правая граница – на восток и т.д. (рис. 1).

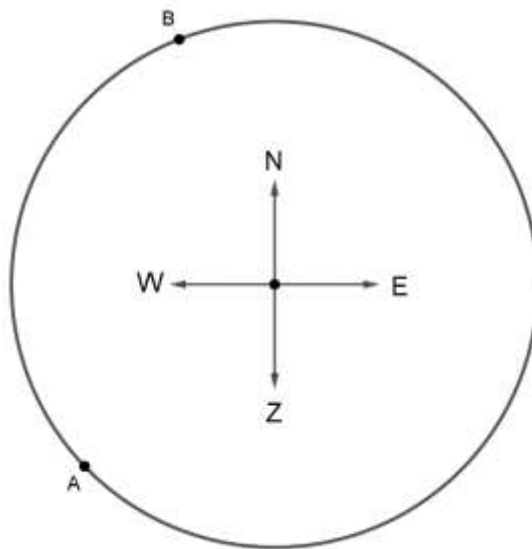


Рис. 1. Чтение географических карт

Если наблюдатель в центре абсолюта смотрит на север, то он увидит самую верхнюю точку абсолюта, если смотрит на восток, то увидит самую правую его точку, и т.д. Обратно, если наблюдатель находится в точке A и хочет увидеть центр абсолюта, то он должен смотреть на северо-восток, а если находится в точке B, то он должен смотреть на юго-юго-восток. (Таков нечасто используемый географический термин.) Итак, точка на абсолюте – это *направление* в геометрии Лобачевского.

Рефлексия. В процессе выполнения данного задания студент учится теоретизировать. При этом значимость теоретических рассуждений не поддается точной оценке в момент их выполнения. Как следствие, от студента требуется способность откладывать получение удовольствия от осознания истинности полученных им результатов, а эта способность, как следует из психологических исследований, коррелирует с разными типами достижений, в том числе академической успеваемостью, экономическим состоянием и уровнем здоровья.

Задание 2. Как выглядит прямая на модели Кэли–Клейна?

Обсуждение. Выбрав инструмент *Прямая*, студент активизирует абсолют и ставит две точки внутри круга. В результате получается фигура, изображенная на рис. 2. На первый взгляд, это хорда, и такой ответ дает абсолютное большинство учащихся. Парадоксально, но такой ответ является неточным, потому что хорда – это отрезок, соединяющий две точки на окружности, а в нашем случае точки на окружности не принадлежат геометрии Лобачевского. Итак, прямая выглядит как *открытая хорда*.

Рефлексия. Студент учится точному употреблению терминов, которое, как известно, важно как в научной деятельности, так и в социальной жизни.

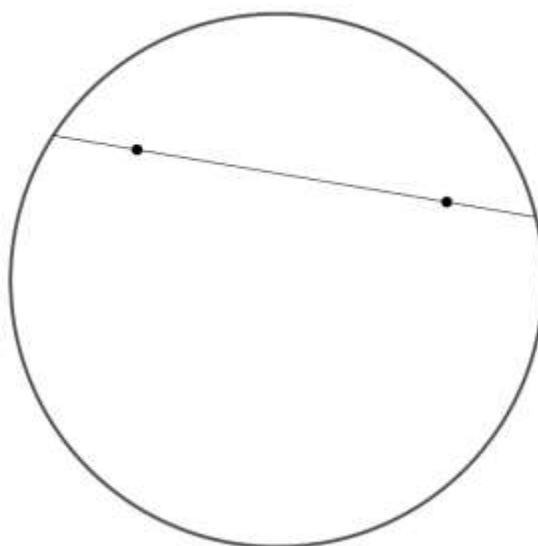


Рис. 2. Прямая

Задание 3. Как выглядят луч и отрезок на модели Кэли–Клейна?

Обсуждение. Выбрав инструмент *Луч*, студент активирует абсолют и ставит две точки внутри круга, а затем проделывает те же самые действия с инструментом *Отрезок*. В результате получаются фигуры, изображенные на рис. 3.

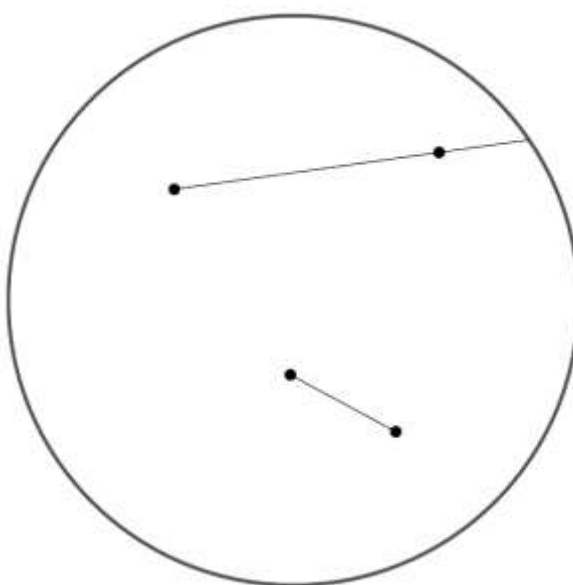


Рис. 3. Луч и отрезок

Оказывается, что эти фигуры имеют в точности тот же смысл, что и геометрии Евклида. Например, отрезок оказывается состоящим из тех точек прямой, которые лежат между двумя точками этой прямой.

Рефлексия. Обнаруженное сходство с евклидовой геометрией дает определенную надежду на возможность использования привычной геометрической интуиции. Насколько обоснована эта надежда, покажет будущее.

Задание 4. Как выглядят параллельные прямые на модели Кэли–Клейна?

Обсуждение. Сначала с помощью инструмента *Прямая* строим прямую AB на модели Кэли–Клейна. Затем выбираем инструмент *Параллельная прямая*, активируем абсолют, отмечаем точки B и A , а также точку C вне ее. В результате

возникает рис. 4.

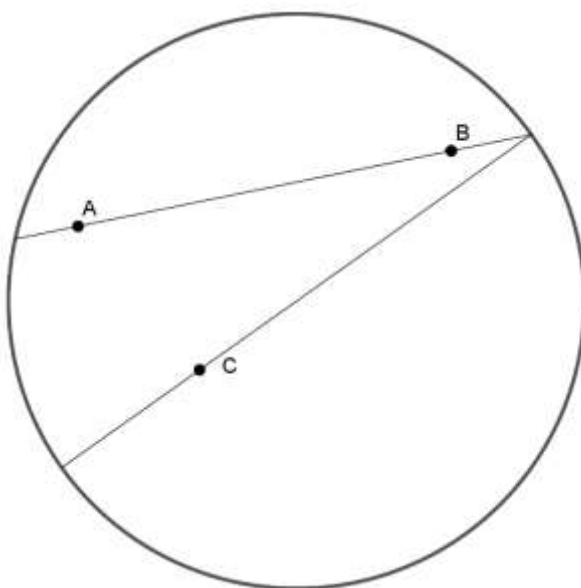


Рис. 4. Параллельные прямые

Полученный рисунок находится в кричащем противоречии с нашей интуицией, сформированной в рамках евклидовой геометрии. К счастью, логический анализ показывает, что никакого противоречия нет. Действительно, две полученные прямые, во-первых, не имеют общих точек и, во-вторых, имеют общее направление. Естественнее считать их параллельными.

Рефлексия. Студент обнаруживает эффективность логического анализа, поскольку именно он позволяет снять обнаруженное противоречие. В культурологическом плане студент учится оценивать целесообразность вводимых терминов. Другими словами, он учится «придумывать» названия, адекватные сути явлений.

Рис. 4 явно асимметричен. Действительно, прямая имеет два «равноправных» направления, а построенная прямая «приближается» только к одному из них. Сделанное наблюдение приводит в следующей задаче.

Задание 5. В чем причина асимметрии предыдущего чертежа? Как ее устранить?

Обсуждение. Перечитывая описание построения рис. 4, мы обнаруживаем последовательность точек (B, A, C) . При этом положение точки C на третьей позиции определено ее особым статусом, а вот положение точек A и B является произвольным. Прделаем построения предыдущей задачи применительно к другому порядку точек, а именно (A, B, C) . В результате мы получим рис. 5. На нем видны два вертикальных угла, сильно отличающихся друг от друга. Действительно, прямые пучка с центром в точке C делятся на два класса: одни прямые пересекают изначальную прямую AB , а другие не имеют с ней ни общих точек, ни общих направлений.

Рефлексия. В этом задании (всего лишь пятом по счету!) студент самостоятельно обнаружил два феномена, относящихся к самой сути геометрии Лобачевского: наличие двух прямых, проходящих через одну точку и параллельных третьей прямой; наличие еще одного случая взаимного расположения прямых, который не встречается в евклидовой геометрии.

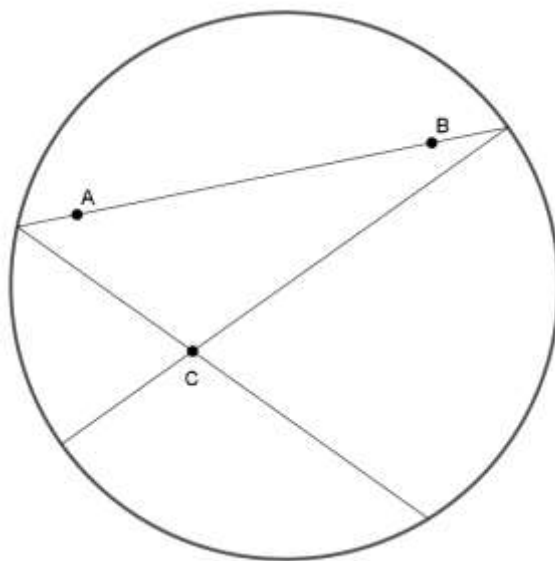


Рис. 5. Две параллели к одной прямой

Задание 6. Как назвать третий случай взаимного расположения двух прямых?

Обсуждение. С одной стороны, такие прямые *естественно назвать* параллельными, потому что они не имеют общих точек. С другой стороны, их *нельзя назвать* параллельными, потому что они не имеют общих направлений. Возможны искусственные грамматические конструкции, например, псевдопараллельные, слабо параллельные, сверхпараллельные и т.п. Ни одна из них не раскрывает сути феномена, поэтому в данный момент ответить на вопрос задачи затруднительно. Временно мы будем использовать термин «псевдопараллельные» прямые, помещая его в кавычки.

Рефлексия. Студент снова сталкивается с феноменом «отложенного удовольствия», потому что в данный момент он не располагает достаточной информацией для введения разумного термина.

Задание 7. Как выглядят взаимно перпендикулярные прямые на модели Кэли–Клейна?

Обсуждение. Как обычно, построим прямую AB , а также несколько точек внутри круга. Выбрав инструмент **Перпендикулярная прямая**, активируем абсолют, отметим точки A и B и какую-либо из ранее построенных точек. Получим фигуру, изображенную на рис. 6.

Бросается в глаза, что «новые перпендикуляры» выглядят по-разному: одни похожи на привычные перпендикуляры, а другие выглядят как наклонные. Попытаемся понять, в чем то общее свойство построенных линий, которое объединяет их под общим именем «перпендикуляры». Второе наблюдение помогает в этом, поскольку все построенные прямые «смотрят в одну сторону».

Продлив их за пределы абсолюта, студент обнаруживает, что все они пересекаются в одной точке (рис. 7).

Проведя из этой точки касательные к окружности, студент видит, что они проходят через концы изначальной хорды. Так возникает алгоритм построения перпендикуляров к прямой на модели Кэли–Клейна.

Рефлексия. В процессе решения этой достаточно объемной задачи студент учится наблюдать, экспериментировать, давать геометрическую трактовку

результатам эксперимента. Значимый результат!

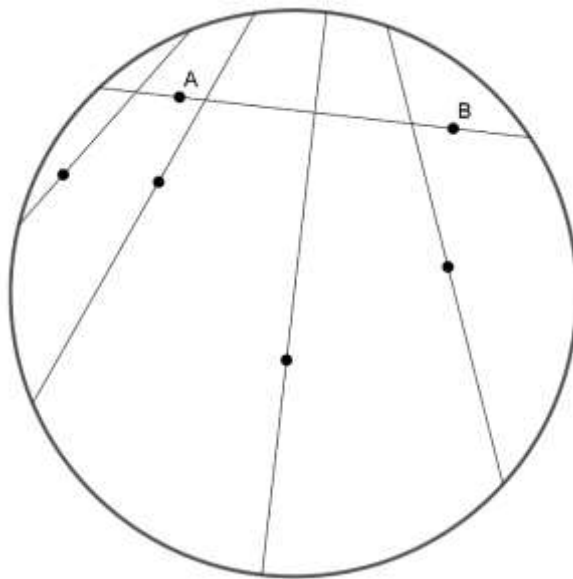


Рис. 6. Разные перпендикуляры к прямой

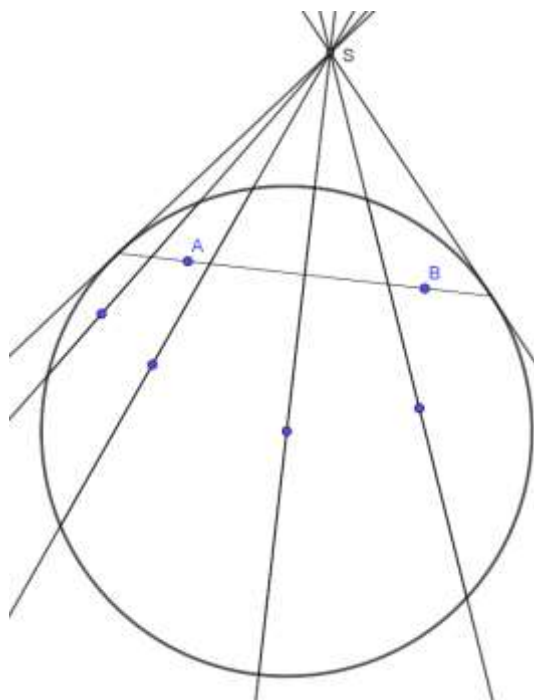


Рис. 7. Алгоритм построения перпендикуляров

Задание 8. К каждой из двух «псевдопараллельных» прямых проводят *все* перпендикуляры. Существуют ли общие элементы у этих двух множеств?

Обсуждение. Несмотря на расплывчатость формулировки, решение предыдущей задачи позволяет легко найти ответ. Для каждой хорды нужно провести две касательные через ее концы, получив тем самым точку их пересечения, а затем соединить две точки пересечения (рис. 8). Так студент самостоятельно получает новую для него теорему.

Теорема 1. Две «псевдопараллельные» прямые имеют общий перпендикуляр, притом единственный.

Рефлексия. Самостоятельное получение субъективно новой теоремы в

непривычной геометрии является ценным математическим результатом, который приобретает особую значимость благодаря его влиянию на личность студента.

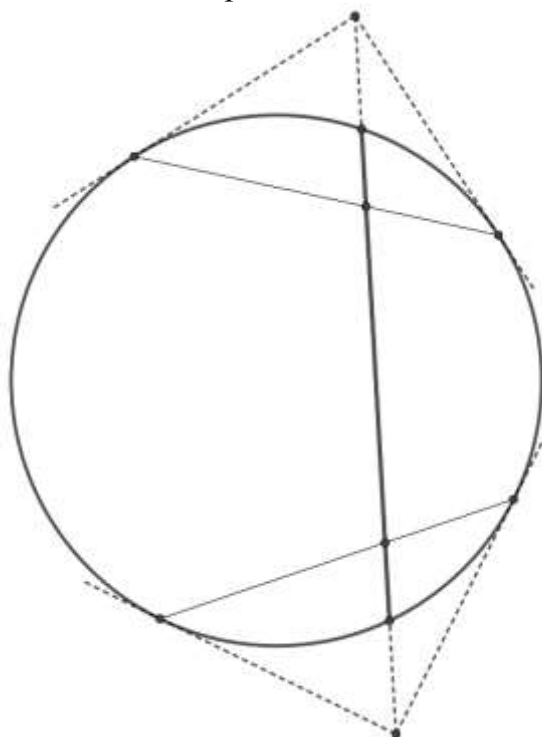


Рис. 8. Общий перпендикуляр

Задание 9. Сравните длину отрезка общего перпендикуляра к двум «псевдопараллельным» прямым и длину любого другого отрезка, соединяющего две точки этих прямых.

Обсуждение. Совсем нетрудно организовать эксперимент по сравнению длин двух отрезков. Для этого нужно сделать следующее.

- 1) Поставить точку X на одной из двух прямых.
- 2) Через точку X провести перпендикуляр XU ко второй прямой с помощью нового инструмента **Перпендикулярная прямая** (рис. 9).
- 3) С помощью нового инструмента **Расстояние** измерить длину общего перпендикуляра и длину отрезка XU , а затем сравнить их.

Сравнение неизбежно приведет студента к следующей теореме.

Теорема 2. Общий перпендикуляр к «псевдопараллельным» прямым является кратчайшим среди отрезков с концами на этих прямых.

Другими словами, по мере удаления отрезка XU от общего перпендикуляра, причем в любую сторону, его длина растет! Так у нас появляются достаточные основания для того, чтобы ввести естественное имя для двух «псевдопараллельных» прямых, которое адекватно сути феномена, – *расходящиеся прямые*.

Рефлексия. Еще раз студент получил новую теорему, и это важно. Важно также, что процесс присвоения адекватного названия оказался не произвольным, а потребовал предварительного математического исследования.

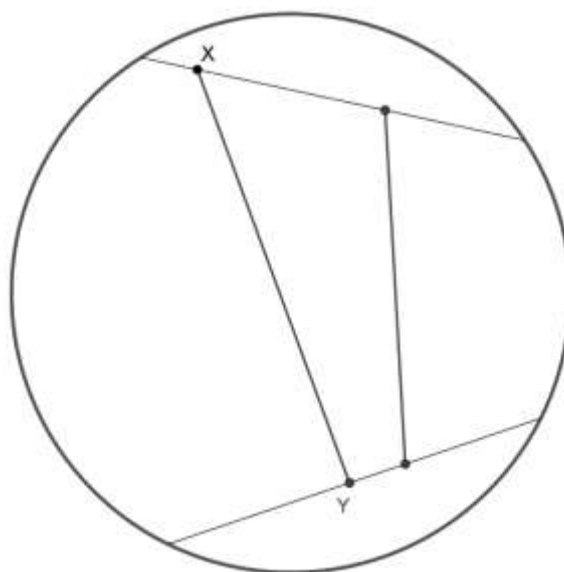


Рис. 9. Расходимость «псевдопараллельных»

Из всего сказанного можно сделать следующие **выводы**.

1) Предложенные компьютерные инструменты позволяют студенту самостоятельно построить существенную часть геометрии Лобачевского.

2) Процесс самостоятельного построения геометрии способствует формированию у «строителя» умений математика-исследователя, влияя при этом на саму личность студента.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Atanasyan, L. S. (2001) *Geometria Lobachevskogo: Kn. dlya uchashtih*. Moskva: Prosveshtenie, 336 s.

2. Bazilev, V. T. i dr. (1975) *Geometria II. Ucheb. posobie dlya studentov fiz-mat. fak-tov ped. in-tov*. Moskva: Prosveshtenie, 367 s.

3. Kagan, V. F. (1956) *Osnovaniya geometrii. Uchenie ob obosnovanii geometrii v hode ee istoricheskogo razvitiya. Chasty vtoraya*. Moskva: Gosudarstvennoe izdatelystvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 344 s.

4. Yastrebov, A. V., Kosheleva, L. Yu. (2019) Chertezhnye instrumenty dlya geometrii Lobachevskogo: modely Kэli–Kleyна. *Matematicheskoe obrazovanie v tsifrovom obshtestve: materialy XXXVIII Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavateley matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskikh vuzov* (26–28 sentyabrya 2019 g.). Samara: SF GAOU VO MGPU, c. 314–317.

5. Yastrebov, A. V. (2019) Osvoenie geometrii Lobachevskogo posredstvom kompyuternykh eksperimentov na modeli Keli–Kleyна. *Geometria i geometricheskoe obrazovanie*, Sbornik trudov IV Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Geometria i geometricheskoe obrazovanie v sovremennoy sredney i visshey shkole» (k 80-letiyu E. V. Potoskueva) 29–30 noyabrya 2019 goda. Tolyatti: Izdatelystvo TGU, c. 78–83.

EDUCATION IN THE 21ST CENTURY – DEVELOPMENT PATHS AND RISKS

Alexander Gennadievich Lukankin
Russian State Academy of Intellectual Property

Abstract: *The article presents the authors' point of view on the role and place of fundamental natural mathematical knowledge in modern society. The main idea is the need to review the tasks facing the education system. It is concluded that the creation of moral guidelines, the formation of systemic thinking and knowledge should become priorities.*

Keywords: *Education system; System thinking*

JEL code: *I20*

ОБРАЗОВАНИЕ В XXI ВЕКЕ – ПУТИ РАЗВИТИЯ И РИСКИ

Александр Геннадьевич Луканкин
Российская государственная академия интеллектуальной собственности

Трансформация системы общего и профессионального образования, последовавшая после смены политических режимов в СССР и Болгарии, привела к утрате многих, уже достигнутых ранее, позитивных завоеваний. Одной из причин этого можно считать отсутствие четко сформулированной задачи системы образования. Ранее эта задача формулировалась как воспитание гармонической развитой личности – творца. Одним из постсоветских министров образования была поставлена другая задача: воспитание квалифицированного потребителя. При этом, не указывалось кто и где будет создавать продукты, которые ему надо потреблять. Сегодня очень много говорят о различных инструментах (например, цифровизация), но не обсуждают какую задачу при помощи этих инструментов предстоит решать. Задача определяет выбор инструмента, а не наоборот. В отрыве от задачи инструмент не может быть хорошим или плохим. Он может быть нужным или не нужным для решения конкретной задачи. Возможно ли сегодня создать качественную систему образования, отвечающую современным условиям?

Перед современной школой вновь должна быть поставлена задача не только дать определенный объем знаний, но и подготовить обучающихся к их будущей практической деятельности. Ранее эту задачу советская и болгарская школы решали путем осуществления идеи политехнического образования. Предполагалось, что получив в общеобразовательной школе хорошую политехническую подготовку, учащиеся смогут ориентироваться в любом производстве, овладеть техникой, передовыми методами труда, сумеют реализовать принцип единства теории и практики в профессиональной деятельности.

Основная задача предметов естественно-математического цикла в общеобразовательной школе, на наш взгляд, – привести обучающегося к определенному мировоззрению, соответствующему современному состоянию естественных наук.

Нам представляется, что основными приоритетами системы образования в XXI веке должны быть (Кречетов, 2012):

- 1) нравственность;

- 2) развитие мышления;
- 3) знания.

Нравственность – понятие относительное. Но сегодня порядка 70% населения России в той или иной степени отождествляют себя с Православием. Нравственные нормы основных мировых религий очень близки друг к другу. Даже «Моральный кодекс строителя коммунизма» по сути своей повторял христианские ценности. Поэтому решение этой проблемы возможно. Если человек будет обладать знаниями, но у него отсутствуют нравственные ориентиры, то он может представлять реальную угрозу для общества.

Сегодня педагоги и психологи много говорят об оптимизации процесса обучения. В качестве важных факторов, необходимых для этого, отмечают эмоциональную стабильность, положительную самооценку, уверенность в себе, коммуникативную успешность, умение взаимодействовать с одноклассниками и учителями. В результате гораздо больше внимания уделяется не интеллектуальному развитию, а эмоционально-коммуникативной сфере. Поэтому Л.А. Ясюкова (2005) в качестве основного направления психолого-педагогической работы в школе выделяет развитие мышления ребенка, а не становление его личности, системы коммуникаций и эмоциональных контактов. По мнению автора, большинство из кажущегося многообразия интеллектуальных задач, возникающих перед школьниками в процессе обучения, может быть решено с помощью развития *понятийного мышления*.

Л.А. Ясюковой выделены следующие операции понятийного мышления (ПМ):

- 1) Умение выделять существенное, главное (интуитивный компонент ПМ).
- 2) Умение выделять объективные причинно-следственные связи (логический компонент ПМ).
- 3) Умение обобщать, систематизировать информацию (понятийная категоризация).

Сформировать понятийное мышление можно только систематически изучая основы естественных наук. Каждая наука имеет свою систему фундаментальных (и, в силу этого, интуитивно понимаемых, не имеющих строгих определений) понятий, на которой выстраивается иерархия понятий более высокого уровня. В каждой науке эта система имеет свою специфику. Только изучив разные подходы, можно сформировать понятийное мышление. Из естественно-математических дисциплин должна быть отобрана доступная детям сумма знаний и обобщений, включающая лишь самое существенное, то, что позволит подвести учащихся к пониманию основных закономерностей развития окружающего мира, дать им знание основ наук. В процессе изучения учащиеся углубляют и расширяют представления о реальности окружающего их мира, беспрестанно меняющегося и находящегося в непрерывном движении, учатся находить закономерные связи между явлениями. Где нет науки, нет понятийного мышления.

Сегодня для многих обучающихся понятия сигнал, информация и знания стали тождественными. Увы, на данный момент, не существует общепризнанных определений этих понятий. Хотя на конкретных примерах различия можно объяснить легко. Если к вам обращаются на языке, который вы не знаете, сигнал есть, информации нет. Другой пример: турист из России в Варне спросил у местного жителя: «Как пройти к экономическому университету?» Получил ответ: «Направо». Если этот ответ не сопровождался жестом руки, то имеет смысл уточнить на каком

языке – русском или болгарском – этот ответ был дан. Есть старая шутка: скажи человеку, что на небе 1582356 звезды и он поверит. Но напиши на заборе «Окрашено», он обязательно потрогает пальцем и измажется. Информация была. Человек на доступном ему языке прочитал надпись. Но знание возникло только тогда, когда эта информация была сопоставлена с личным жизненным опытом.

Знания могут быть энциклопедическими и системные. Первые представляют собой набор понятий расположенных в алфавитном порядке и слабо связанные друг с другом. Они хорошо подходят для решения кроссвордов, участия в викторинах, сдачи ЕГЭ. Пример – индийский фильм «Миллионер из трущоб». Но для успешности в профессиональной деятельности нужны системные знания. Системности в изучении в общеобразовательной школе окружающего мира можно добиться через синхронизацию программ и межпредметные связи, а не через метапредметность, представляющую собой возврат к программам ГУСа 20-х годов.

Под системностью следует понимать:

1) Структурированность – окружающий мир представляется учащимся как единое целое, где все предметы и явления органически связаны друг с другом, зависят друг от друга, обуславливают друг друга.

2) Взаимосвязь составляющих частей – только установление взаимности подсистем и условий их существования дает возможность понять происходящие в природе явления, дает возможность человеку направленно изменять природу, не разрушая её.

3) Подчиненность организации всей системы определенной цели – состояние непрерывного движения и изменения, непрерывного обновления и развития.

От состояния системы образования сегодня зависит какой будет страна завтра. Подросток, будучи включенными в систему образования, должен думать не о легком времяпрепровождении, а развитием новых собственных возможностей. Только когда человек станет человеку другом, а не волком, станет созидателем, а не потребителем, станет хозяином своей судьбы — у него (а вместе с ним и у страны) появится шанс на будущее.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Krechetov V., protoierey (2012) Hristianstvo – eto zhizny: intervyuy 2004 – 2008 godov. *Vospominania*, Moskva: «MBTs prp. Serafima Sorovskogo», 288 s.

2. Yasyukova L.A. (2005) *Zakonomernosti razvitia ponyatiynogo mishlenia i ego roly v obuchenii*. SPb.: IMATON, 256 s.

THE COMPETENCE EDUCATIONAL MODEL - A REVOLUTIONARY LEAP OR A CRASH INTO THE ABYSS OF MEMORYLESS IGNORANCE?

Assoc. Prof. Margarita Lambova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: Reasoning and evidence are presented in support of the thesis that the competency education approach, based on a controversial definition of the term "competence", by shifting the focus from personal development to meeting the needs of the global economy by adaptive, unified and culturally disconnected human resources, is not only one of the main reasons for the collapse of education, but it is partly incompatible with democratic values, as it does not create prerequisites for the formation of critically thinking individuals who are free and capable of self-determined management of their lives based on their own world, knowledge, attitudes and preferences.

Keywords: Collapse of education; Competency-based education (CBE); PISA; Democratic values; OECD.

JEL code: A20, O15, O29

КОМПЕТЕНТНОСТНИЯТ ОБРАЗОВАТЕЛЕН МОДЕЛ – РЕВОЛЮЦИОНЕН СКОК ИЛИ СРУТВАНЕ В БЕЗДНАТА НА БЕЗПАМЕТНОТО НЕВЕЖЕСТВО?

Доц. д-р Маргарита Ламбова
Икономически университет – Варна, България

Въведение

Бягството от фундаменталните знания, осигуряващи предпоставките за развитието на логиката и самостоятелния и критичен мисловен процес, според мен е една от основните причини за срива както на училищното, така и на висшето образование не само в България, но и в останалите европейски държави, които следват препоръките на ЕП и Съвета на ЕС, свързани с така наречената компетентностна концепция за развитие и осъществяване на образователния процес. Твърдението ми със сигурност звучи еретично на фона на амбициозната цел, която си поставя тази концепция, а именно създаването на компетентности за решаването на реални проблеми.

Целта на разсъжденията е обосновка на тезата, че компетентностният образователен подход не само е една от основните причини за срива образованието, но отчасти е несъвместим с демократичните ценности, тъй като в центъра му не стои развитието на личността, а единствено интересите на глобализираната икономика, свързани с формирането на унифицирани, адаптивни, откъснати от културната среда човешки ресурси със стереотипен мисловен процес.

Изложението не претендира за изчерпателност на разсъжденията по разглеждания проблем, акцентира се върху по мое мнение най-смушаващите моменти, свързани с налагането на новата образователна парадигма.

1. Произход на новата образователна парадигма – естествен процес или „лабораторен експеримент“ с неясни последици?

На първо място тук би следвало да бъде поставен въпросът: Кое предизвиква налагането на унифицирания компетентностен модел като нова парадигма, помитаща вековни традиции в образованието, обвързани с културното наследство на нациите? Дали това са преди всичко динамично променящите се дадености в глобализиращия се свят, закономерно следствие на които е научно обоснованото преосмисляне на устоите, целите и същността на образователния процес или съществува и друг фактор, който форсира подмяната на парадигмите с цел обслужване на определени интереси?

Тъй като в Европа компетентностният модел навлиза на базата на препоръки на ЕП и Съвета на ЕС (съответно от 2006г. и 2018г.), е логично да се предположи, че той е проект на видни експерти в областта на образованието и педагогиката, сътворен на базата на сериозна научна обосновка и преминал през широк обществен дискурс, преди да бъде одобрен за реализация, но реалността е съвсем друга.

Компетентностната концепция се основава на понятието компетентност, със смислово съдържание, позоваващо се на дадената от когнитивния психолог Weinert (2001) дефиниция, според която под компетентност следва да се разбират „когнитивните способности и умения, които са на разположение на индивидите или могат да бъдат усвоени от тях, за да решават определени проблеми, както и свързаната с тях мотивационна, волева и социална готовност и способности, за да могат да използват решенията на проблемите успешно и отговорно в променливи ситуации.“ Дефиницията е изключително спорна, тъй като образованието не би следвало да се свежда единствено до усвояване на когнитивни умения с цел практическо приложение и решаване на проблеми. Тя изключва образователния фундамент, обхващащ знания за логиката, смисъла и значението на познанието, върху които би следвало да се надстроят уменията за решаването на реални проблеми.

Въпреки че самият Weinert е признавал, че дефиницията му е спорна и не е в състояние да предизвика научен консенсус, Организацията за икономическо сътрудничество и развитие (ОИСР) се е позовала точно на нея при конструирането на стандарти за тестовете си PISA, игнорирайки учебните планове и културното наследство, които измерват глобално унифицирани приложни умения, необходими в едно бъдеще, за което ОИСР твърди, че познава (Krautz, 2015). На това място би следвало да възникне въпросът за ролята на тази организация при налагането на новата образователна парадигма, при положение че основната ѝ цел според член 1 на Конвенцията на ОИСР (Convention OECD) е подкрепата на политики, във фокуса на които стоят интересите на глобализираната икономика, а не човекът като личност, на която трябва да бъдат осигурени предпоставките да се развива свободно според своите способности и лични предпочитания. Това означава, че традиционното образование, от което се очаква да осигури тези предпоставки, не само че не влиза в обсега на мерките, то може да се разглежда като препятствие пред процес, който е в състояние да формира унифициран, откъснат от националните устои хуманен капитал, притежаващ качества, позволяващи да бъде използван безпроблемно навсякъде по света. Логично е организация, в центъра на интересите на която стои глобалната икономика, да възприема човека преди всичко като ресурс, който се очаква да бъде максимално продуктивен, а не като личност, която е способна и свободна сама да моделира и управлява живота си. Логично е също така да се предположи, че демократичните общества би трябвало да се противопоставят

на налагането на образователна парадигма, чийто център е изместен от личностното развитие към потребностите на икономиката от хуманен капитал, в които културното наследство, моралът, свободата на мисълта не само че не играят никаква роля, но в много случаи възпрепятстват безпроблемното му функциониране.

Закономерно възниква въпросът защо демократичните държави безропотно преобразуват образователния процес според вижданията на ОИСР, като по този начин обричат на осакатяване личностното развитие на своите граждани? Причините са комплексни, тук ще бъде обърнато внимание на една от основните и това са тестовите PISA, правилата и критериите на които се създават от ОИСР, „която според собственото си виждане от шестдесетте години на миналия век играе централна роля при осигуряването на индикатори за измерване на образователни резултати, като по този начин има намерение не само да оценява образователната политика, но и да допринася за нейното изграждане.“ (Gurría, 2011). В партньорски оценки като PISA ОИСР вижда „най-ефикасния път за упражняване на влияние върху поведението на суверенни държави“ (OECD, 2004). Правото на подобно влияние тук ще оставим без коментар. PISA и компетентностната ориентация следват неолиберална парадигма, въведена в ОИСР от представители на "Chicago School" в началото на 60-те години, според която: „Днес се разбира от само себе си, че образованието също принадлежи към икономическия комплекс, че е също толкова необходимо да се подготвят хората за икономиката, колкото е необходимо да се подготвят материални блага и машини. Образователната система сега стои редом с магистралите, стоманодобивните заводи и фабриките за изкуствени торове.“ (Gehmacher, 1966).

Следователно образованието се възприема като икономическа инвестиция в човека, училищата стоят редом до стоманолейрни и заводи за изкуствени торове, произвеждайки адаптирано функциониращ хуманен капитал, като при това производство учителите са фактор на производството, а учениците суровината. Това изключително прагматично виждане до голяма степен дехуманизира образованието, защото какъвто и да е капиталът, дали човешки, интелектуален или материален, той има значение само от гледна точка на неговата продуктивност в икономиката. Според визията на ОИСР трябва да бъдат наложени нови образователни стандарти, които отменят всички традиционни представи за образование. Фокусът се измества от цялостното личностно развитие към създаването на подходящи за икономиката човешки ресурси, като под прогрес явно се разбира единствено икономическият растеж, откъснат от духовното развитие на човека. Не се предвижда образованието да създава условия за свободно, отговорно и самоопределено управление на воля, нагласи, желания. Целта на образованието по-скоро е „създаването на умения за непрекъснато адаптиране“ (Graupe & Krautz, 2014).

Вглеждайки се внимателно в тази напълно ориентирана към създаването на хуманен капитал концепция за образователния процес, би следвало да стигнем до заключението, че тя противоречи на демократичните ценности, които предполагат свободно, отговорно и самоопределено развитие на личността, зачитане на културното многообразие, свобода на мисълта, на мненията и нагласите в рамките на установеното по демократичен път законодателство. Следователно такава концепция едва ли би имала шанс да бъде възприета положително от обществото, ако беше възникнала в рамките на определена държава и преминала през

нормалното за демокрацията обществено обсъждане. Почти повсеместното в глобален аспект налагане на тази нова парадигма става възможно благодарение на „троянски кон“, работещ в полза на ОИСР и нейната визия за образование – това са тестовете PISA, конструирани на базата на субективни критерии съобразно гореизложените представи за образователния процес. Още при първия тест PISA2000, имащ за цел оценяването и сравнението на компетентностите и уменията на ученици от 30 държави, непокрито се признава, че стандартите не се ориентират според образователните традиции, конституцията и политиката на оценяваните страни, а се основават на концепция, която следва да бъде възприета като единна норма (Graupe & Krautz, 2014). От друга страна само на базата на образователен процес, който е съобразен с тези стандарти, е възможно постигането на резултати, разкроени и съшити по този шаблон. Не е възможно постигането на високи резултати, при положение че образователните стандарти от една страна и стандартите при оценяване от друга, са създадени на базата на различни логически концепции. Както едните, така и другите са плод на субективно възприятие, следователно не може да се очаква съизмеримост и съответствие. По този начин ОИСР успява да постигне невъобразимото на пръв поглед – задавайки критериите за оценяване (измерване) на резултатите, успява да промени правилата на играта, заобикаляйки обществения дискурс, като е подпомогната от широкия медиен отзвук по отношение на тестовете PISA, най-вероятно и от числовата слепота на обществото, без да се наложи сериозно да се конфронтира с въпроси за същността на критериите и за проверката на тяхната целесъобразност.

Когато става въпрос за измервания, обществото обикновено не се интересува от процеса на производство на информацията, а само от крайния резултат, зададен с помощта на числа. Така наречените компетентности представляват качествени свойства, за които не съществуват независими от субективната преценка числови съотношения в обективната действителност, те са косвено измерими с помощта на конструирани индикатори. За измерване на дадено косвено наблюдаемо свойство, каквато е компетентността, могат да послужат теоретични модели, които го дефинират по различен начин, използваните индикатори, чрез които се операционализира моделът, съответно ще осигуряват различно качество на проекцията, като не е възможно сравнението на измерванията, получени чрез тях. Индикаторите са продукт на субективна преценка на този, който ги създава, като те отразяват неговото възприятие за изучаваното свойство. Доколко получените въз основа на подобни измервания резултати позволяват правдиво отражение на реално съществуващите дадености, зависи в голяма степен от възприетия теоретичен модел. Ако последният е спорен заради недостатъчната му научна обосновка, какъвто е случаят с дефиницията за компетентност, на базата на която е изградена компетентностната образователна концепция, тогава стои под въпрос, дали измерителните инструменти действително мерят това, което трябва да се измерва. Резултатите от образователен процес, който се основава на теоретичен модел, различен от този, формиращ стандартите на ОИСР, е нелогично да бъдат тествани чрез PISA, тъй като би имало пълно разминаване между емпиричните дадености и тяхната числова проекция, което не означава автоматично, че съответната образователна концепция е лоша и формира некомпетентни индивиди. Когато измерителните инструменти не са съобразени с логическата концепция на даден образователен процес, те функционират като криво огледало и резултатите от

измерването са изкривено отражение на действителните знания и умения, които предоставя той.

Несъответствието между функциониращите преди въвеждането на тестовите PISA образователни стандарти, различни в отделните държави, и унифицирания, откъснат от традиции и културно наследство стандарт на ОИСР, закономерно води до образ в кривото огледало на PISA, който предизвиква шок и ужас в държави, дотогава имащи самочувствието, че предоставят качествено образование. Интересно е, че преобладаващо причините за лошите резултати обществото не търси в качеството на огледалото (измерителните инструменти), като приема на доверие, че то е идеално и отразява достоверно емпиричните дадености. Вместо да търси недостатъци на огледалото и да се опита да го смени с друго, по-подходящо за отразяване на знанията и уменията в контекста на националните особености, без обществена дискусия държави, иначе демократични, започват да променят своята традиционна образователна система, нагласяйки я според кривините на въпросното огледало, като по този начин обричат на духовно осакатяване най-голямото си богатство – своите граждани, подложени на обезкореняване и дресировка за адаптивно, непредубедено и унифицирано функциониране в глобалната икономика. „Самата ОИСР открито признава, че използва този „партньорски натиск“, за да управлява поведението на суверенни държави, върху което по правило няма влияние и не би трябвало да има такова. Под прикритието на измерването успява, заобикаляйки гражданското общество, да наложи концепция за образованието, която разгражда всички традиционни културни нагласи.“ (Krautz, 2015).

2. Крайният „продукт“ - компетентни личности или недообразован хуманен капитал със стереотипно мислене?

В ежедневната му употреба понятието компетентност се възприема изцяло положително от обществото, неподатливо е на критика, но влаганият смисъл се различава съществено от този, формиращ основите на компетентностната концепция. Докато в ежедневието възприемаме компетентността като сложен комплекс от взаимосвързани фундаментални знания, практически умения, присъщи на даден индивид и необходими му за упражняването на определена професия или дейност, компетентностите в образователния процес представляват разнороден конгломерат от откъслечни знания, умения и нагласи, за които се предполага, че ако голямо количество от тях бъдат нахвърляни „на парче“ в контейнера (човешкия мозък), притежателят му ще е в състояние да функционира стандартизирано, адаптивно, гъвкаво и непредубедено съобразно потребностите на глобализираната икономика. Компетентностният модел възприема човека основно като ресурс, който следва да бъде моделиран по такъв начин, че да бъде в състояние да осигурява максимална продуктивност. В центъра на новата парадигмата вече не стои индивидът, на когото трябва да бъдат осигурени възможности за развитие на самостоятелното мислене и оттам управление на живота чрез стабилна основа от фундаментални знания, съчетани с ясна личностна и културна идентификация, а потребностите на глобализираната икономика, свързани с формирането на унифицирани, откъснати от културната среда човешки ресурси. На практика новата образователна парадигма възприема човека като механичен сбор от полезни за икономиката функции, наречени компетентности, като образователният процес се свежда до дресировка, чрез която те да бъдат усвоени стереотипно. Тази дресировка

се основава до голяма степен на готови алгоритми за действие и поведение, за които не се изисква осмисляне на материята от съответната предметна област на науката, следователно не е нужно тя да стъпва върху стабилните основи на фундаменталните знания, превръщайки последните в излишен баласт. Въпреки че про форма моделът включва развитието на критичното и творческо мислене, на практика според мен той предизвиква точно обратното – алгоритмите за решаването на реални проблеми, когато не стъпват върху осмислен фундамент от знания, върху културното наследство и традиционните ценности, правят невъзможно разчупването на шаблона, необходимо за самостоятелен критичен и творчески мисловен процес.

Критични гласове се надигат още в началото на процеса на налагане на новата образователна парадигма, като лингвистично обучени преподаватели обръщат внимание на проблема с измеримостта на компетентностите, които могат да бъдат оценени само приблизително и неясно чрез заключения на базата на пърформънси. (Löwisch, 2000). За съжаление не се обръща внимание на научно обоснованото противодействие, като промяната на парадигмата се налага „силово“ по административен път. Подобна фундаментална реорганизация на образователната система чрез административни средства влиза в противоречие с основната социална задача на училището като средище, което създава предпоставките за развитието на свободни и самоопределени личности на основата на демократичните ценности и плурализма.

На базата на наложената от ОИСР образователна концепция възникват каталози с ключови компетентности и техните елементи, както и с очаквани резултати от обучението, формиращи рамката за изграждане на учебни планове и програми както в училищното, така и във висшето образование. Въпреки че тези каталози са безкрайни като телефонни указатели, те ограничават свободата на мисълта, творческото и критично мислене, тъй като представляват твърд шаблон, към който трябва да се придържат както авторите на учебни планове и програми, така и преподавателите, дори когато имат достатъчно аргументи за своето несъгласие с определени формулировки. Те са длъжни да обслужват наложените етикети (компетентности), като обучението в крайна сметка добива формата на тренировка на огромен брой откъснати едно от друго „практически“ умения, като основите и спойката, които би следвало да бъдат осигурени от фундаментални знания за логиката, философията и смисъла на познанието, както и от учебен материал, който подпомага формирането на културна и личностна идентичност на базата на мисловна свобода, отиват на заден план или отсъстват почти напълно. Образователен процес, осъществен на базата на планиране на компетентности в смисъла на използваната от ОИСР дефиниция, може спокойно да бъде сравнен със строителството на сграда без фундамент и без спойващ материал между тухлите.

Дефиницията за компетентност освен знания и умения за решаването на реални проблеми включва и необходимите за това нагласи. Понятието нагласа има много измерения, като цялата съвкупност от нагласи на даден индивид формира неговата личност. Би следвало да бъде уточнено, кои точно нагласи демократично по същност обазование има право да „тренира“ у подрастващите, така че да не се влиза в противоречие с принципите на плурализма. Компетентност, изразяваща се в определени нагласи, може да бъде формирана единствено чрез целенасочено управление на посоката на мисълта, вкарването ѝ в коловоз, който се възприема за „правилен“ и „нормален“. Когато нагласите са свързани с традиционни

общочовешки ценности, основа за функциониране на обществото, по правило се приема, че те се формират в унисон не само в училището, но и в семейната и обществена среда. Когато обаче става въпрос за нагласи, които имат определена идеологическа окраска и за които не съществува консенсус в обществото, те не би следвало да бъдат включени като компетентности в образователния процес, който претендира, че е съобразен с демократичните ценности, тъй като това би противоречало на принципите на плурализма и свободата на мисълта. Действителността за съжаление е друга, като причината трябва да се търси в ролята, която е отредена на човека в тази образователна парадигма – не на личност, на която трябва да бъдат осигурени предпоставки за свободно развитие, а на хуманен ресурс, който трябва да бъде максимално приспособим, непредубеден и гавкав при функционирането му в икономиката. Така например нагласите, които следва да бъдат формирани във връзка с дигиталната компетентност „изискват разсъдливо и критично, но любознателно, непредубедено и напредничаво отношение към развитието на дигиталните технологии и дигиталното съдържание, както и етичен, безопасен и отговорен подход към ползването на дигиталните средства.“ (МОН, 2019). Според мен текстът съдържа сериозно логическо противоречие – от една страна следва да бъде формирано критично отношение към развитието на дигиталните технологии, но от друга то задължително следва да бъде непредубедено и напредничаво. Това противоречие може да бъде преодоляно единствено чрез компромис по отношение на критичното отношение, което да бъде такова само по форма. Бурното развитие на дигиталните технологии не може да бъде обуздано, камо ли спряно, но да се изисква от ученици и студенти да формират непредубедена нагласа към него означава унищожаването още в зародиш на всякакви мисли, свързани с евентуални негативни последици за човечеството, които може да предизвика или вече е предизвикало това развитие, като тук става въпрос за нагласи, за които няма консенсус в обществото и е възможно изградените вече представи на обучаваните да не съответстват на тези, които те би следвало да добият според този текст. В крайна сметка ускорената дигитализация, в частност изкуственият интелект, обслужват преди всичко глобализираната икономика, а не така наречените хуманни ресурси, критично мислещата част от които разсъждава върху опасностите, включително върху възможната дехуманизация на бъдещето. Възниква въпросът, по какъв начин се проверява и оценява „усвояването“ на подобни нагласи? В случай, че обучаваните не ги възприемат като интегративна част от своята личност и изразят аргументирано своята предубеденост, как ще бъдат оценени? Ще получат ли пониска оценка, т.е. ще бъдат ли наказани заради част от своя светоглед, влизаща в противоречие с нагласата, която трябва да бъде усвоена? Не съществува ли риск обучаваните само да симулират определени нагласи, за да получат желаната оценка? Тъй като по правило се оценява степента на усвояване на изискуеми знания, умения, вече явно и нагласи, при въпросния казус неминуемо се влиза в противоречие с принципите на плурализма и свободата на мисълта – неподходящи нагласи няма как да бъдат оценени високо, а симулирането на нагласи с цел висока оценка е свързано със самоцензура, която се налага тогава, когато свободата на изразяване е ограничена. Тук е даден пример с нагласи, които само косвено имат идеологически оттенък, но референтната рамка за учене през целия живот включва и такива, които съответстват на водещата политическа доктрина на западния свят, като те могат да бъдат квалифицирани като идеологически, докато все още не съществува пълен

консенсус в обществото и науката, като съществува опасност от тяхното преекспониране в образователния процес. Такива например са зададените в референтната рамка нагласи за подкрепа на безопасността и устойчивостта на околната среда, за подкрепа на устойчивите начини за живот.

Според Krautz (2015) налагането на компетентностната концепция носи белезите на пропаганда, чрез която се променят дълбоко вкоренени културни възгледи на голяма част от населението, като последствията за обществото са подкопаване на демокрацията, културата, но същевременно и на икономиката, в интерес на която се твърди, че действа ОИСР. Визията на тази организация обаче в най-добрия случай е в съответствие с интересите на глобални концерни, нуждаещи се от приспособими сътрудници със стандартизирани умения, които могат да се местят безпроблемно навсякъде по света. Средният бизнес и занаятите отдавна са забелязали и се оплакват от това, че „компетентностно ориентираният“ могат и знаят все по-малко.

Негативни последствия има и за училището и семейната среда, като компетентностната концепция води до объркване, както и до загуби за педагогиката и дидактиката. Когато образователният процес се планира въз основа на компетентности, предметната област на познанието отива на заден план, като обучението се разрежда откъм логическо съдържание и става системно неясно, което пречи на обучаваните да изградят ясно структурирани и осмислени знания. Учебниците, чиято структура е съобразена с учебни програми, създадени на базата на безкрайните каталози от компетентности, също допринасят за подкопаване на системния подход в образованието. Споделям мнението на Krautz (2015), че децата се прибират от училище претоварени, разочаровани или дори отегчени, без да знаят какво са учили или как да си напишат домашните, така че родителите работят с тях в къщи, но често и те самите вече почти не разбират учебниците. Следователно тази концепция вместо да подпомага образователната справедливост, каквато цел има според твърденията на ОИСР, тя задълбочава образователния разрыв, тъй като за семейства, в които родителите имат по-малко време, финансови средства и образователен ценз, не е възможно или не се счита за необходимо да отделят средства за частни уроци. Като резултат се стига до неудовлетворени ученици и родители, негативно отношение към образованието, което се възприема като непосилно бремене, съответно на изхода се появяват невежи, неграмотни и некомпетентни индивиди, които не само че не могат да функционират като продуктивен хуманен ресурс, но и не са в състояние да участват в обществото като самостоятелно преценяващи и разрешаващи житейските си проблеми, отговорни и мисловно свободни личности.

Заклучение

Въпреки че повечето европейски държави отдавна са прекрили своето училищно образование според стандартите на ОИСР, резултатите от тестовете PISA стават все по-лоши, което е аргумент в полза на твърдението, че компетентни в общия смисъл на думата, способни и свободни сами да моделират и управляват живота си личности не е възможно да бъдат формирани чрез така наречения компетентностния модел на образование, при който във фокуса стоят интересите на глобалната икономика, а не личностното развитие на индивидите, чиято роля е принижена до тази на адаптивен, унифициран, откъснат от националните и културни устои хуманен капитал.

Съобразно поставената цел са представени аргументи в полза на тезата, че новата образователна парадигма, стъпвайки върху една спорна дефиниция за понятието „компетентност“, не само е една от основните причини за срива на образованието, но същевременно с фокусирането си върху откъснати от фундаменталните знания „практически“ умения и формирането на предписани нагласи донякъде влиза в противоречие с демократичните ценности, които предполагат свободно, отговорно и самоопределено развитие на личността, зачитане на културното многообразие, свобода на мисълта, на мненията и нагласите в рамките на установеното по демократичен път законодателство.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Council Recommendation of 22 May 2018 on key competences for lifelong learning (2018/C 189/01):
<https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/ALL/?uri=CELEX%3A32018H0604%2801%29>
2. Convention on the Organisation for Economic Cooperation and Development:
<https://www.oecd.org/en/about/legal/text-of-the-convention-on-the-organisation-for-economic-co-operation-and-development.html>
3. Gehmacher, E. (1966. Bericht über d. OECD Konferenz in Washington 1961. *Wirtschaftswachstum und Bildungsaufwand. Europäische Kulturpolitik*, Bd. 2. Hg. i.A. der Kulturkommission des Europarates. Wien, Frankfurt, München.
4. Graupe, S., Krautz, J. (2014). Die Macht der Messung, *Coincidentia - Zeitschrift für europäische Geistesgeschichte*. Beiheft 4: Der andere Blick: Fragendes Denken zum theoretischen Rahmen der empirischen Bildungsforschung. Hrsg. v. Schwaetzer, H., Hueck, J., Vollet, M., Kueser Akademie, Bernkastel Kues.
5. Gurria, A. (2011). Editorial – 50 Jahre Bildung im Wandel. *OECD: Bildung auf einen Blick 2011. OECD-Indikatoren*, pp.13-24.
6. Krautz, J. (2015). Kompetenzen machen unmündig. Eine zusammenfassende Kritik zuhanden der demokratischen Öffentlichkeit. *Streitschriften zur Bildung*, Heft 1, hrsg. v. d. Fachgruppe Grundschulen der GEW Berlin, pp.6-21.
7. Löwisch, D.-J. (2000). Kompetentes Handeln. *Bausteine für eine lebensweltbezogene Bildung*, Darmstadt, pp. 87-92.
8. Ministerstvo na obrazovaniето i naukata (2019). *Kompetentnostnitate i referentnite ramki. (III-book)*:
<https://www.mon.bg/nfs/2019/12/iii-book.pdf>
9. OECD (2004). *Getting to grips with globalisation: the OECD in a changing world*. Paris, OECD.
10. Recommendation of the European Parliament and of the Council of 18 December 2006 on transnational mobility within the Community for education and training purposes: European Quality Charter for Mobility (2006/961/EC):
https://eur-lex.europa.eu/legal-content/BG/TXT/?uri=uriserv%3AOJ.L_.2006.394.01.0005.01.ENG&toc=OJ%3AL%3A2006%3A394%3ATOC
11. Weinert, Fr. (2001). *Leistungsmessungen in Schulen*. Beltz Verlag, Weinheim und Basel.

STUDY ON THE AVAILABILITY OF A COMMERCIAL NETWORK OF RETAIL FUEL OUTLETS IN BULGARIA

Assoc. Prof. Michal Stojanov, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *The research objective of this work is to keep track of the availability of fuel retail outlets to the Bulgarian population between 2013 and 2022. In parallel, the evolution of the number of registered passenger cars in the country, which should be provided with an appropriate level of fuel retail outlets, is traced. A disproportionate change in the growth of the car fleet is noted, compared to the distribution of fuel retail outlets. The prospects for development in the direction determined by the gradual massification of electric vehicles and the deployment of the infrastructure of alternative charging stations in the country are examined.*

Keywords: *Retail trade network; Commercial outlets; Sale of fuels; Fossil fuels*

JEL code: *L81, Q49*

ИЗСЛЕДВАНЕ НА ОСИГУРЕНОСТТА С ТЪРГОВСКА МРЕЖА ОТ ОБЕКТИ ЗА ПРОДАЖБА НА ДРЕБНО НА ГОРИВА В БЪЛГАРИЯ

Доц. д-р Михал Стоянов
Икономически университет – Варна, България

Увод

Впрягането на парната сила, а по-късно и откриването на двигателя с вътрешно горене променя коренно начина, по който съвременният човек се придвижва в ежедневието си. Но едва ли изобретателите на тези технологии са поставяли, още повече приоритизирали в своите начинания, проблемите на ограничеността на ресурсите и значимостта на въглеродния отпечатък от тяхното масово използване. Днес тези въпроси не само придобиват грандиозна актуалност, но и издигат с растяща значимост екологичните изисквания, поставяни за употребата на фосилни горива във всекидневието. Понастоящем потребителят очаква търговската мрежа на дребно за продажби на горива да бъде разгърната в оптимално месторазположени обекти, така че да могат да се осигурят продуктите за задвижване на личните превозни средства, по начин при който осигуреността с тези точки за продажбен контакт трябва относително и в определена степен да бъде приравнена и да наподобява пазарната концепция за предлагане на продуктите от ежедневно потребление. Разбира се, спецификата на тяхната употреба, която е свързана с моторните превозни средства, не предполага търговските обекти, предлагащи горива, да са разположени в рамките на максималното улеснение за достигане, така както това се допуска за групата на т.нар. удобни магазини и продуктите от първа необходимост. Независимо от това, използването на превозни средства за тяхното моторизирано и бързо достигане определя възможността да се говори за тяхното локализиране в точки, предлагащи широки измерения на удобството, практичността и достижимостта.

Основната цел на настоящото изследване е да се проследи динамиката в развитието на обезпечеността на населението с търговски обекти за продажба на горива в страната през годините на периода 2013-2022 г. и да се очертаят основни

проблеми и възможности за усъвършенстване.

В рамките на нормативни разпоредби, касаещи осъществяването на търговия с горива, попадат конкретни изисквания за строително-технически правила и норми за осигуряване на безопасност при пожар на автоснабдителните станции за горива и местата за тяхното локализиране. По този начин се извеждат разнообразни ограничения за вместимост, минимални отстояния между съоръжения, обекти в рамките на станцията, съседни строежи и др., които да гарантират функционалната пожарна безопасност на тези обществени обекти (вж. по-подробно: Naredba № Iz-1971, 2018). В голяма степен тези нормативи определят технически спецификации за разполагане на търговските обекти за търговия с горива при планирането и застрояването на урбанизираните територии и извън урбанизираните територии, като допълнително се определя и класификационния критерий за тяхното разграничение според норматив за площ, който установява като малък тип бензиностанция и газостанция такава с до 2000 кв. м, за среден тип се определя с площ до 3000 кв. м, за голям тип обекти до 4000 кв. м, за бензиностанции от голям тип със съоръжения за сервизни услуги – до 5000 кв. м (Naredba № 7, 2022). Следователно, осигуреността на населението с обекти за продажби на горива се предопределя от широк кръг фактори, към които се включват и специфични нормативни разпоредби, касаещи тяхното изграждане и безопасно експлоатиране. Независимо от това, гъстотата на населението, неговата осигуреност с лични моторни превозни средства и характеристиките им, изградената пътна инфраструктура и интензивността на трафика от автомобили, както и конкуренцията в сегмента в най-висока степен определят – гъсто населените жилищни зони или такива с интензивен пътен трафик, както и важни междуселищни шосейни артерии да бъдат атрактивни локации за месторазполагане на търговски обекти за продажба на горива.

Теоретико-методологически проблеми на изследването

Концептуалното разбиране за социалния ефект на търговията на дребно се обвързва с разнообразни насоки на проявление, някои от основните между тях са: „възможно най-пълното задоволяване на потребителското търсене на населението със стоки, намаляване на разходите на време на населението във връзка с покупките, осигуряване на по-голямо задоволство у купувачите при покупките и посещенията на търговските обекти, възможно най-пълно задоволяване на потребителското търсене на купувачите и посетителите на търговските обекти от разнообразни допълнителни търговски и културно-битови услуги, оказвани чрез търговските обекти“ (Salova, 1985, с. 45). За тази цел могат да се използват множество показатели, един от които е степента на задоволеност на населението с търговски обекти на 1 000 или 10 000 жители. Адаптирането на този показател за целите на изследването в настоящата работа е свързано с получаване на количествените оценки за степента на задоволеност на населението в България с обекти за търговия на дребно с горива. Като за по-комплексното проучване на този проблем се извеждат и оценките за осигуреността с търговски обекти за търговия с горива на 10 000 автомобила за лични цели.

Ключово ограничение на изследването е свързано с използването на вторични данни, систематизирани от Евростат, които обезпечават информацията за периода 2013-2022 г., но за целите на по-задълбочения анализ са приведени допълнително както исторически, така и по-актуални данни, обобщени от НСИ. Това позволява да

се проведе сравнителен анализ във времеви контекст с по-голяма познавателна значимост и база за сравнение.

При разглеждането на проблема за степента на осигуреност на населението с обекти за търговия с горива се прилагат класически изследователски методи като контент и критичен анализ, а количественото емпирично изследване е разгърнато върху извеждането на оценките на показателите за степен на задоволеност и тяхното сравнително изследване.

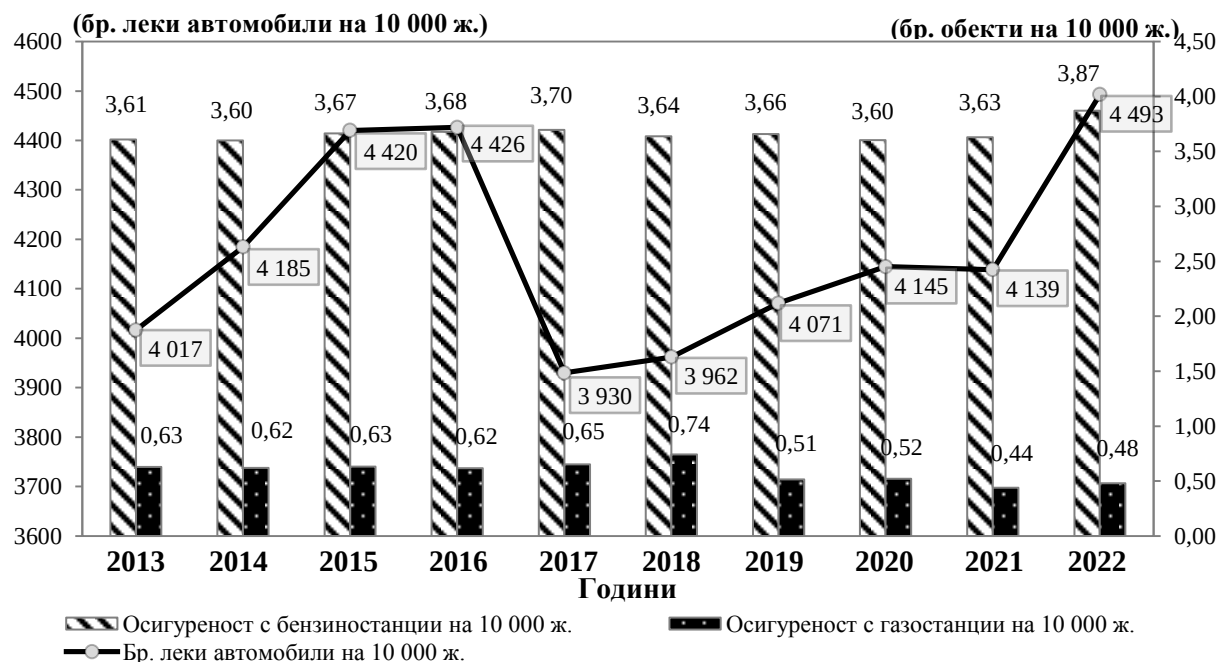
Оценка и анализ на осигуреността с търговски обекти за продажби на горива в България

В рамките на изследвания десетгодишен период (2013-2022 г.) се запазва дългосрочната тенденция за увеличаване на броя на леките автомобили, регистрирани в страната от 2 910 235 бр. през 2013 г. до над 3 006 215 бр. 31.12.2023 г. (Eurostat, 2024), което дава оценка на средногодишния темп на растежа от $CAGR_{2013-2023}=100,3\%$. За сравнение в началото на прехода към пазарна икономика към 31.12.1990 г. в България е имало 1 317 437 бр. леки коли, в това число собственост на населението са били 1 276 751 бр. (NSI, 1992). Нарастването в броя на регистрираните коли в комбинация с трайната негативна тенденция за понижаваща се численост на населението в страната намира своя ефект за съществения ръст на притежаваните автомобили на всеки 10 000 ж. По този показател през 2013 г. гражданите са били обезпечени с 4 017 бр. на 10 000 ж. (вж. фиг. 1), което се покачва до 4 493 бр. на 10 000 ж. през 2022 г., като в сравнителен план през 1990 г. оценката е била 1 420 бр. на 10 000 ж. или относително изменение от над 316% за 2022 г. спрямо 1990 г.

При така формиралата се ситуация би следвало да се отчете логическата необходимост, изразена в постепенното повишаване на осигуреността с обекти за продажба на горива, което да е резултат от нарастващия автомобилен парк в страната. Въпреки това реалната ситуация посочва, че в рамките на обследвания период се наблюдава понижение в броя на търговските обекти, специализирани в продажбата на горива. При бензиностанциите от 2 684 бр. през 2012 г. и 2 615 бр. през 2013 г. до 2 495 бр. през 2022 г. или затваряне на 189 бр. обекта за 11 години, докато при газостанциите процесът на отпадане е още по-изразителен от 555 бр. пред 2012 г. и 456 бр. през 2013 г. до 310 бр. през 2022 г. или редуциране с 245 станции за зареждане на МПС с газ спрямо 2012 г. Тази картина на редуциране на броя на търговските обекти резултира в отрицателен средногодишен темп на прираст от $-0,7\%$ в броя на бензиностанциите и $-5,7\%$ в броя на газостанциите за периода 2012-2022 г.

Степента на осигуреност на населението с търговски обекти за продажба на светли горива (бензин и дизел) от 3,68 бр. на 10 000 ж. през 2012 г. и 3,61 бр. на 10 000 ж. през 2013 г. се повишава до най-високата оценка от 3,87 бр. на 10 000 ж. към края на периода на проведеното изследване през 2022 г. Подобна картина на развитие е продукт на бързото понижение в числеността на населението на страната по различни причини в сравнение с условно по-бавното намаление в броя на търговските обекти за търговия с горива. Това означава, че в рамките на направения преглед се отчита подобряване на степента на осигуреност на населението с бензиностанции, което е предизвикано от по-бързото намаление в числеността на населението в сравнение с намалението, отчетено в броя на търговските обекти за продажба на светли горива. Най-ниска е била обезпечеността от само 3,60 бр.

бензиностанции на 10 000 ж., която се е постигнала през 2014 г. и 2020 г.



Фиг. 1. Осигуреност с търговски обекти за продажба на горива на дребно и бр. леки автомобили на 10 000 ж. в България по години на периода 2013-2022 г.

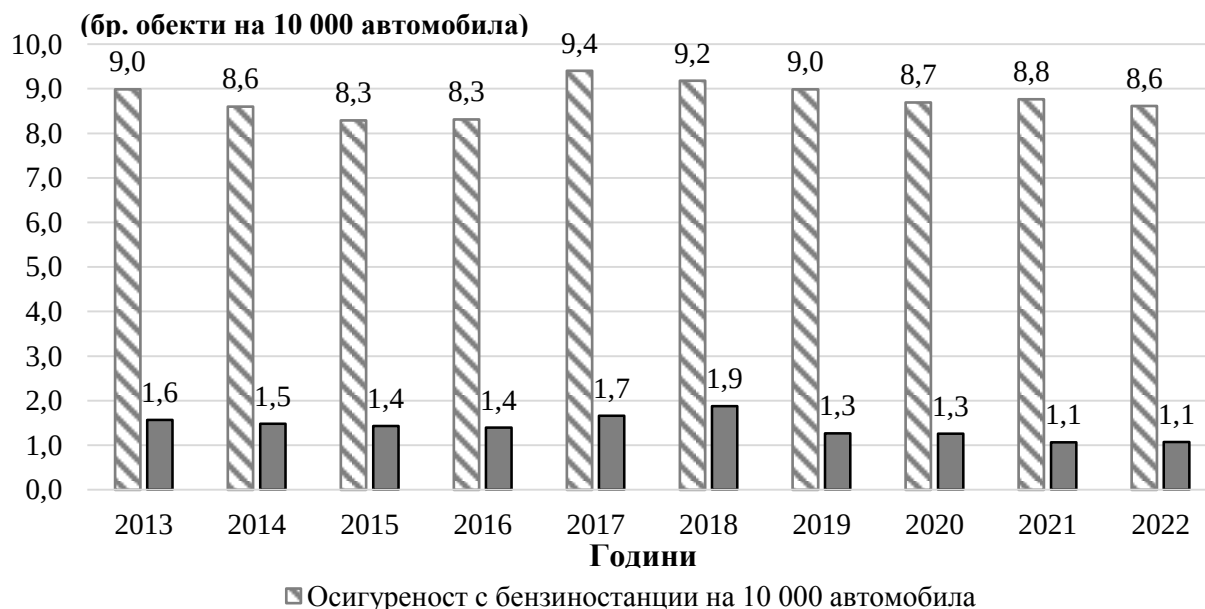
Източник: Разработка на автора по данни от Eurostat и NSI.

При газостанциите се наблюдава противоположна тенденция, а именно най-висока е била обезпечеността към началото на периода от 0,63 бр. газостанции на 10 000 ж. през 2013 г. до минимална оценка от 0,44 бр. на 10 000 ж. през 2021 г. и незначително повишение до 0,48 бр. на 10 000 ж. в края на периода през 2022 г.

Въпреки безусловно по-ниското замърсяване на автомобилите, използващи газ „пропан-бутан“ и природен газ за горивния процес в двигателите с вътрешно горене, осигуреността на населението с газостанции непрекъснато се понижава. Отчасти това може да бъде обяснено с увеличаващата се популярност на комплексността на продуктовото предлагане на традиционните бензиностанции, което се разширява и с колонки за зареждане на пропан-бутан (LPG) и/или природен газ (LNG), докато за целите на статистическата отчетност те се специализират и групират като бензиностанции.

Направеното проучване е допълнено с извеждане на оценките за броя обекти, падащи се на 10 000 автомобила, регистрирани в България към 31 декември на съответната година на периода 2013-2022 г. (вж. фиг. 2). Количествените данни показват, че в рамките на целия период имаме понижение в броя на осигуреността на автомобилния парк с бензиностанции от 9 бр. обекти на 10 000 автомобила през 2013 г. до 8,6 бр. обекти на 10 000 автомобила през 2022 г. Най-висока е била тази осигуреност през 2017 г. от 9,4 бр. обекти на 10 000 автомобила, а най-ниска точно в предходните две години 2015 г. и 2016 г. с 8,3 бр. обекти на 10 000 автомобила, това в най-висока степен демонстрира, как при съкращаването на автопарка от 3 143 568 бр. леки автомобили общо регистрирани в страната през 2016 г. до 2 770 615 бр. леки автомобили през 2017 г. независимо от понижаващия се брой на бензиностанциите от 2 613 бр. през 2016 г. до 2 605 бр. през 2017 се повишава осигуреността на 10 000 автомобила с обекти за продажба на светли горива. Сходна е картината на развитие и при газостанциите, където от 1,6 бр. обекти на 10 000

автомобила през 2013 г. се отчита понижение до най-ниското значение от 1,1 бр. обекти на 10 000 автомобиля през 2022 г., като тук най-високата оценка е получена също през 2017 г. от 9,4 бр. газостанции на 10 000 автомобиля регистрирани в страната.



Фиг. 2. Осигуреност с търговски обекти за продажби на горива на дребно на 10 000 автомобиля в България по години на периода 2013-2022 г.

Източник: Разработка на автора по данни от Eurostat и NSI.

Очаквано развитие

Като нова и с голям потенциал се оформя разрастващата се популярност на автомобилите с електрическо задвижване. Те се явяват очакван заместител на традиционните двигатели с вътрешно горене, които в обозримо бъдеще постепенно ще бъдат изключвани в продуктовото предлагане на автомобилните производители. В рамките на ЕС след 2035 г. на първичния пазар ще могат да се предлагат единствено нови автомобили, които постигат условно климатична неутралност, с чиято помощ може да бъде изпълнена целта за намаление с 55% на емисиите с парникови газове до 2030 г. в сравнение с базисната 1990 г., заложиени в пакета от мерки „Готови за цел 55%“ (European Council, Council on the European Union, 2023). Това предполага постепенно масовизиране на автомобилите с алтернативни форми на задвижване, което изтласква на предно място проблемите за осигуреността на потребителите с обекти за предлагане на тези алтернативни източници на енергия (електрически зарядни станции, водородни станции, синтетични горива – E-Fuels и др.). Така на практика в обозрим хоризонт изпълнението на заложените стратегически таргети ще предизвиква съществена промяна на пазара за горива. Тя е свързана с разрастващото се търсене на продуктите, необходими за алтернативното задвижване на леките автомобили, като с най-сериозен очакван ръст са електрическите зарядни станции. Това създава възможност както за появата на специализирани обекти, така и за трансформацията на съществуващата търговска мрежа за търговия с фосилни горива в предлагане на услугата за зареждане на електрическите превозни средства или такива с други алтернативни форми на горива с нулеви емисии (водород, амоняк).

Към месец септември 2024 г. броят на електрическите зарядни станции, обхващащи територията на страната, е 2 187 бр., разположение в 1 562 локации. От тях 497 бр. станции са за бързо зареждане или използващи прав ток (DC), които могат да обезпечат зареждане в диапазон от 20 kW до 240 kW. Останалите 1 065 бр. са от тип, прилагащи технологията на променлив ток (AC) в границите на мощност от 7 kW до 22 kW (VsichkoTok, 2024). Така постепенно в България се формира мрежа от търговски обекти за зареждане на електрически превозни средства, която в голяма степен равномерно да покрие територията на цялата страна.

Възможността за адаптивна промяна на съществуващите търговски обекти за продажба на горива на дребно изисква реорганизиране и преустройство на технологията на търговския процес. На първо място това е времето за зареждане на един електрически автомобил, което в сравнение с условно бързата пропускателна способност на колонките за конвенционални горива при електромоделите е по-продължително. Така например за средния пробег на един европейец от 12,41 км на ден са необходими около 2,48 kWh ел. енергия, което отнема 23 минути при зареждане на домашна станция с мощност 7,4 kW, 16 минути с 11 kW станция и 9 минути с 22 kW станция, аналогичните параметри за един американски шофьор са средно 36,92 мили на ден, което изисква около 11,81 kWh ел. енергия на ден, което би отнело 1 час и 50 минути с домашна зарядна система от 7,4 kW, 1 час и 18 минути с устройство с мощност от 11 kW и 43 минути със зарядна станция с мощност от 22 kW (EVBOX, 2024). Според данните на Департамента на транспорта на САЩ при употреба на станция за бързо зареждане с постоянен ток (Direct Current Fast Charging (DCFC)) за 60 kWh батерия са необходими между 20 минути до 1 час за достигане на 80% от капацитета на батерията (U.S. Department of Transportation, 2023). Следва да се обърне специално внимание на тази критична стойност от 80% на капацитета на батерията, след която зареждането не може да продължи по условно най-мощната и бърза технология с висок заряд, тъй като това е свързано с необходимостта да се предпази батерията от евентуални повреди. Подобно технологично ограничение логично води до прогресивно нарастване на времето за зареждане след достигане на до 80% до постигане на пълнен 100% от капацитета на заряд на батерията. Това предполага увеличаване на броя на обслужващите станции в рамките на един обект за зареждане, поради необходимото време за обслужване на един автомобил. В най-общ план и в практическите измерения на съществуващите търговски обекти за конвенционални горива това често е физически невъзможно.

Втори важен аспект е наличността на капацитет и степента на изграденост на електропреносната мрежа. В настоящето съществуващата инфраструктура на електропреносната мрежа (в домашни, градски, селски условия и в извън населените места) често пъти е несъвместима или не може да покрие нуждите за обезпечаване на електрически товар на една станция за зареждане на електрически автомобили. Нещо повече, неравномерността в потреблението може да бъде следващо сериозно предизвикателство във връзка с постоянното обезпечаване на мощност при моментни скокове и спадове в търсенето. Това, разбира се, създава по-широки възможности за още по-динамично ценообразуване на електрическата енергия за зареждане на електромобили в сравнение с конвенционалните горива, както и за използване на възобновяема енергия и нейното съхраняване в различни по-големина батерии и акумулаторни станции.

Допълнителен аспект на възможно разпространение на зарядните станции за

електрически автомобили е тяхното изграждане в обекти от прилежащата градска или обществена инфраструктура (общински паркинги, търговски центрове, обекти на големи търговски вериги и др.). По този начин осигуреността на населението с алтернативи за зареждане на електрически превозни средства ще бъде по-добре обезпечена. Нещо повече, възможността в домашни условия да се изгради/инсталира станция за зареждане на електрически автомобили, напълно променя концепцията на бизнес идеята за търговия с ресурса необходим за задвижването на лични автомобили, където се елиминира специализирания търговски агент и условно се скъсява веригата за доставка на продукта. Така на практика доставчикът на електрическа енергия за битовите потребители замества традиционните специализирани търговци на горива, което създава възможност за появата на нова група специализирани посредници. Не следва да се пропуска, че в контекста на зеления преход и необходимостта от редуциране на въглеродните емисии, съществуват широки възможности за изграждане и използване на електрическа енергия от възобновяеми енергийни източници и нейното съхранение между периодите на свръхпроизводство и моментите на реално потребление. Последното може да превърне и домакинствата с изградени възобновяеми енергийни системи в доставчици на електрическа енергия, която да покрива нуждите на други потребители с електрически превозни средства. Това позволява търговски обекти от мрежата от зарядни станции да бъдат локализирани в отдалечени, изолирани и неатрактивни за традиционните търговци на горива локации.

Като следващ важен момент, свързан с потреблението на услугите на електрическите зарядни станции, е синергичният ефект, който се постига между прилежащите търговски обекти и зарядните станции сами по себе си. По-конкретно времето за изчакване, което е необходимо, за да се изпълни енергийния трансфер, предполага възникване на ситуация, която да бъде оползотворена за изпълнение на алтернативно търговско посещение и шопинг на допълващи или други продукти. Така на практика продължителността на времето за търговско обслужване от електрическа зарядна станция може да бъде използвано за целите на предлагането на допълващи асортименти от стоки и услуги. Комбинирането на търговски обекти за продажба на горива с други подвижни или стационарни обекти за търговия с храни, напитки, автомобилни консумативи и части, застрахователни продукти, услуги по поддръжка на автомобила и леки ремонти, пунктове за годишен технически преглед и др. позволява да се увеличи притегателната сила в обекти с високо равнище на комплексност на предлаганата търговска услуга.

Заклучение

Предизвикателствата на Зеления преход поставят пред обществото необходимост от предприемане на индивидуални и колективни решения за бъдещето на търговските обекти за зареждане с фосилни горива. На този етап наличната търговска мрежа от обекти под комбинираното въздействие на разрастващия се автопарк, промяната в предпочитанията за използване на алтернативни форми на задвижване, нарастващата конкуренция в сектора и други фактори, водят до непрекъснати промени, за да се отговори на предизвикателствата както в настоящето, така и в обозримото бъдеще на необходимостта от постигане на климатична неутралност. Получените в разработката количествени оценки и тяхната непрекъсната динамика демонстрират, че в пазарния сегмент на търговията с горива се наблюдават силни процеси на адаптивни усъвършенствания, както спрямо

промените в автопарка от леки автомобили, така и в нарастващата популярност на лични превозни средства с алтернативни форми на задвижване.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. European Council, Council on the European Union. (2023). 8 ways life in the EU is becoming greener. [online] Available at: <https://www.consilium.europa.eu/en/8-ways-life-in-the-eu-is-becoming-greener/> [Accessed 21.09.2024].
2. EVBOX. (2024). How long does it take to charge an electric car at home? [online] Available at: <https://evbox.com/en/how-long-to-charge-EV-at-home> [Accessed 23.09.2024].
3. Naredba № 7 от 22 декември 2003 г. за правила i нормативи за ustroystvo na otdelnite vidove teritorii i ustroystveni zoni. (2022). // Obn. DV. br.3 от 13 Януари 2004г., posl. izm. i dop. DV. br.84 от 21 Октомври 2022г. [online] Available at: <https://lex.bg/laws/ldoc/2135476546> [Accessed 01.10.2024].
4. Naredba № Iz-1971 от 29 октомври 2009 г. за stroitelno-tehnicheski pravila i normi za osiguryavane na bezopasnost pri pozhar. (2018). // Obn. DV. br.96 от 4 Декември 2009г., posl. izm. i dop. DV. br.63 от 31 Yuli 2018г. [online] Available at: <https://lex.bg/laws/ldoc/2135653786> [Accessed 01.10.2024].
5. NSI. (1992). Statisticheski godishnik na Republika Balgariya 1991. S.: NSI.
6. Salova, N. (1985). Osnovni problemi na organizatsiyata i effektivnostta na vatreshnata targoviya, Varna: VINS D. Blagoev.
7. U.S. Department of Transportation. (2023). Charger Types and Speeds. [online] Available at: <https://www.transportation.gov/rural/ev/toolkit/ev-basics/charging-speeds> [Accessed 23.09.2024].
8. VsichkoTok. (2024). eKars BG EOOD. [online] Available at: <https://vsichkotok.bg> [Accessed 25.09.2024].

USING AFFINE TRANSFORMATIONS IN MS EXCEL TO IMPROVE MOTIVATION TO LEARN ELEMENTS OF LINEAR ALGEBRA

Associated Professor Deyan Mihaylov, PhD
University of Economics–Varna, Bulgaria

Abstract: Basic tools of linear algebra are vectors and matrices and operations with them. They are abstract in nature and in many students are not motivated to learn them. To improve motivation in this matter, an application of matrices to affine transformations in the plane is proposed in this paper. An example implemented in the MS Excel environment is presented. It is recommended to use appropriate funny images as transformation objects.

Keywords: Affine Transformation; MS Excel

JEL code: C65

ИЗПОЛЗВАНЕ НА АФИННИ ТРАНСФОРМАЦИИ В СРЕДАТА НА MS EXCEL ЗА ПОВИШАВАНЕ НА МОТИВАЦИЯТА ЗА ИЗУЧАВАНЕ НА ЕЛЕМЕНТИ ОТ ЛИНЕЙНАТА АЛГЕБРА

Доц. д-р Деян Михайлов
Икономически университет – Варна, България

Въведение

Математиката е инструмент, използван за анализиране и решаване на проблеми, свързани с почти всички аспекти на живота. По-специално, линейната алгебра е едно от най-полезните средства в инструментариума на математиката. Мощните техники на линейната алгебра се използват в другите клонове на математиката и в много разнообразни приложения в различни други науки (Andrilli & Hecker, 2010).

Възможността за прилагане в различни области се дължи на абстрактния характер на линейната алгебра. Тази абстрактност се проявява и в характера на едни от нейните основни обекти, матриците, и в действията с тях, и предизвиква до известна степен неразбиране на смисъла им. Осъзнаването на полезността на този инструментариум се затруднява и от факта, че операциите с матрици са трудоемки, свързани са с еднообразно повтарящи се дейности, които са досадни за студентите. Като резултат следва ниска мотивация и пренебрежително отношение към дисциплината. Както се отбелязва и в други изследвания, у някои студенти се утвърждава мнението, че тези знания не са необходими (Madzharova, 2022).

Изграждането на мотивация за изучаване на матриците и действията с тях може да се постигне чрез разглеждане на подходящи примери. Като такива може да се използват афинните трансформации на графични обекти в равнината. Поради изчислителната сложност на процеса е целесъобразно да се използва подходящ софтуер. Тъй като компютърната техника е широко разпространена във висшите училища (и не само там), това не е проблем.

Целта на настоящата разработка е да се представи един начин за включване на афинните трансформации в обучението по линейна алгебра и аналитична геометрия. Трансформациите на изображения се използват в компютърната графика и

разглеждането на такъв пример е полезно за студентите, обучаващи се по специалности от професионално направление „Информатика и компютърни науки“, а и за всички, проявяващи интерес към темата.

Постановка на задачата и решение

Нека са зададени един графичен обект оригинал и изискванията, на които трябва да отговаря неговия образ. Необходимо е да се намери закон, който да отвежда оригинала в образа. Като ограничение се приема, че трансформацията е афинна, т.е. трансформационния оператор е линеен и обратим.

Както е известно, общият вид на една афинна трансформация е

$$X^{(1)} = T \cdot X + X_0, \quad (1)$$

където: X е векторът-оригинал;
 $X^{(1)}$ е векторът-образ;
 T е обратима матрица;
 X_0 е вектор.

В случаите на трансформация на графичен обект в равнината (1) добива следния вид:

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В израза (2) матрицата $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ задава ротацията, мащабирането и скосяването (sheer) на образа, а векторът $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ задава транслацията по абсцисата и ординатата.

Удобно е да се използват хомогенните координати на точките, като в този случай (2) може да се представи в следния вид:

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & x_0 \\ a_{21} & a_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Квадратната матрица в (3) може да се определи като оператор на трансформацията. Негови частни случаи са (House & Keyser, 2017), (Gonzalez & Woods, 2018):

- $C = \begin{pmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - оператор на чистото мащабиране (скалиране) на образа. Параметрите c_x и c_y са коефициентите на промяна на мащаба по абсцисата и ординатата;
 - $R = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - оператор на чистата ротация на образа.
- Параметърът Θ е ъгълът, на който се завърта изображението по посока,

обратна на часовниковата стрелка. Върхът на ъгъла е началото на координатната система.

$$- S = \begin{bmatrix} 1 & s_x & 0 \\ s_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad - \text{оператор на чистото скосяване (Sheer) на образа}$$

Параметрите s_x и s_y са факторите на скосяване на изображението по координатните оси.

$$- X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad - \text{оператор на чистата трансляция на образа.}$$

Параметрите x_0 и y_0 са стойностите на линейното изместване на образа по координатните оси.

За демонстрация на трансформациите е необходимо да се използва подходящ софтуер. Избран е MS Excel по няколко причини. Продуктът е познат на студентите от изучаването му в основното и средното училище. В MS Excel има вградени функции за работа с матрици, които могат да се използват, и графични възможности (макар и твърде скромни). Не на последно място MS Excel дава възможност за непосредствено проследяване на изчислителния процес, което е полезно в хода на обучението. Изборът на MS Excel се основава и на факта, че съществува известен опит в използването му при преподаване на отделни теми от математиката (Penev, 2018).

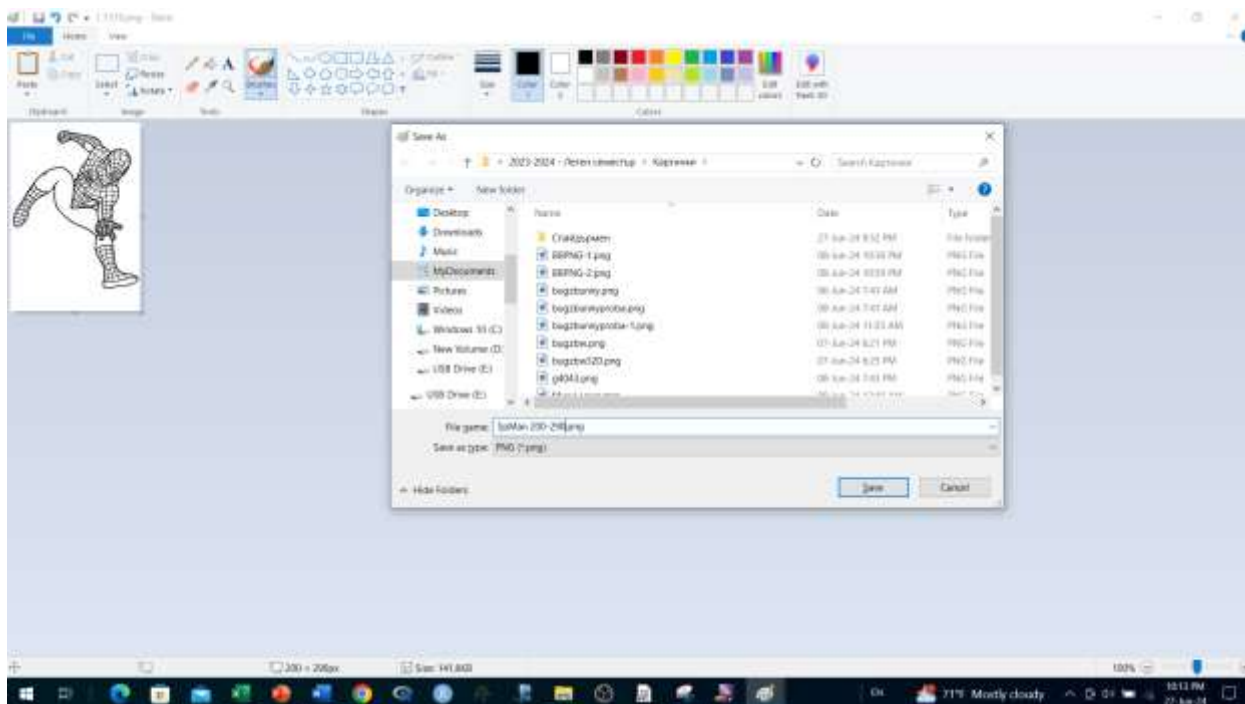
Трансформацията (3) предполага, че векторите на точките на графичните обекти са вектори-стълбове. В MS Excel е по-удобно точките на графичните обекти да се представят като редове от матрица. Следователно, като се използва свойството $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ на операцията умножение на матрици, (3) се представя във вида

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & y_1^{(1)} & 1 \\ x_2^{(1)} & y_2^{(1)} & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(1)} & y_n^{(1)} & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

За намаляване обема на данните може да се препоръча да се използват контурни монохромни изображения. Всяка точка от контура се представя с нейните координати. Лявата матрица от матричното произведение в (4) съдържа хомогенните координати на точките от оригинала. Матрицата в дясната част на (4) съдържа хомогенните координати на точките от образа.

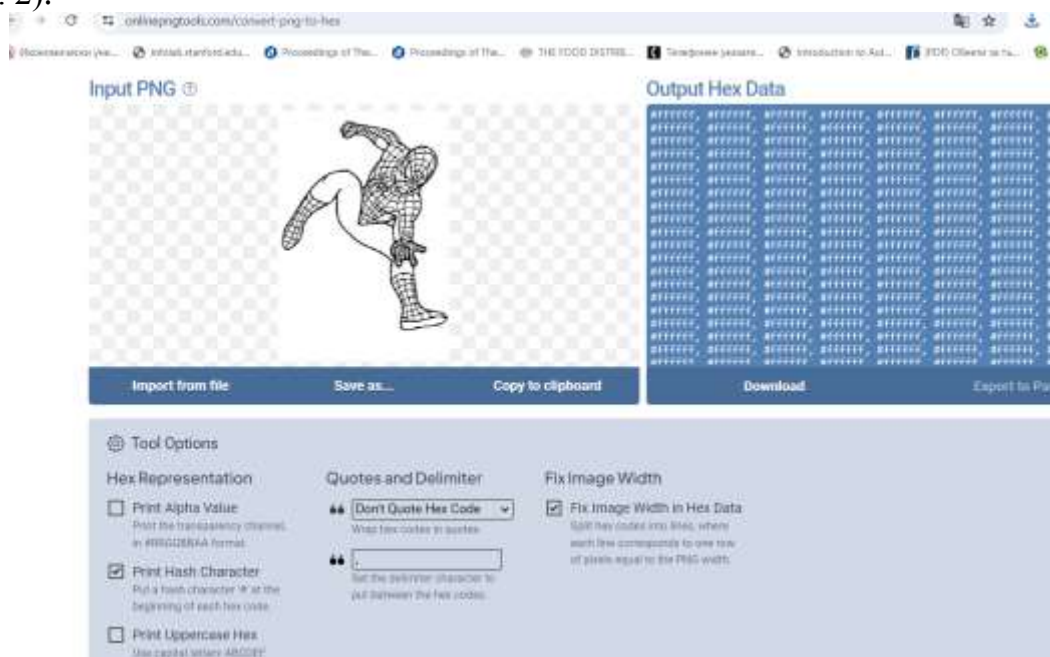
За генериране на матрицата, съдържаща координатите на точките от оригинала може да се използва следната последователност от действия:

Намира се (или се създава) подходящо контурно монохромно изображение на бял фон. В глобалната мрежа, например, може лесно да се открият подобни. Изображението се преобразува във формат PNG и размерът му се намалява, за да се намали обемът на матрицата с координатите на точките на оригинала. Опитът показва, че размер 200/300 пиксела е достатъчен, за да се осигури добро качество. Преобразуването може да се извърши, например, с инструмента Paint от Windows Accessories. На фиг. 1 е показана такава обработка на контурно изображение на анимационния герой Спайдърмен.



Фигура 1. Преобразуване на изображение в средата на Paint
Източник: Собствена разработка.

От формата PNG трябва да се извлече информация за точките на изображението в разпознаваем от MS Excel вид. Един от начините е да се генерира матрица, елементите на която да съдържат информация за цвета на всяка точка от изображението. За създаването на такава матрица може да се използва web-базирания инструмент <https://onlinepngtools.com/convert-png-to-hex>, който преобразува PNG формат в текстов файл. В негов шестнадесетичен код във формат #RRGGBB са описани цветовете на всяка точка. Точките са подредени в редове и колони, като точките с черен цвят са с код #000000, точките с бял цвят са #FFFFFF. (фиг. 2).



Фигура 2. Преобразуване на PNG формат в текстов файл.
Източник: Собствена разработка.

В съответствие със зададените опции се генерира текстов файл output-onlinepngtools.txt, който може да се разтовари на локалното устройство. Файлът се отваря в средата на Excel. В някои от полетата има интервали и те трябва да се премахнат, например с команда Replace.

В средата на MS Excel е необходимо да се извърши допълнителна обработка. За всяка точка се извличат координатите, които са равни на изместването на клетката, в която е описанието на точката спрямо най-горната лява клетка на масива. В отделен лист за всяка точка се създава ред, в който се извличат координатите и стойностите на интензивността на отделните цветове – червен (R), зелен (G) и син (B). При определянето на координатите трябва да се има предвид, че изображенията с формат PNG са в лявоориентирана координатна система, като положителната посока на оста OY е отгоре надолу, а изображението в средата на MS Excel ще бъде в дясноориентирана координатна система. Следователно ординатите на точките трябва да се модифицират.

Следва отстраняване на точките, които са с по-голяма наситеност на цветовете. За всяка точка се пресмята обобщена наситеност, като сума от интензивностите на трите цвята. Отстраняването става последователно, като точките се сортират по възходящ ред на наситеността. На фиг. 3 са показани няколко изображения, в които се използват точки с наситеност по-малка от 765, от 500 и т.н. Подбира се изображение, съдържащо възможно най-малко точки (за намаляване обема на файла), но с достатъчно добро качество. В случая добри са изображенията с използване на точки с наситеност до 200 или до 300. Трябва да се има предвид, че това не е правило. Долната граница, при която качеството на изображението се влошава, може да бъде различна за различните изображения.



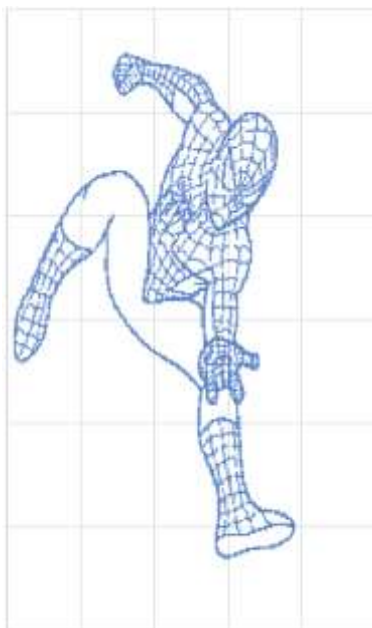
А) Използват се точки с наситеност по-малка от 765. Брой на точките – 7993



Б) Използват се точки с наситеност по-малка от 500. Брой на точките – 6244



В) Използват се точки с наситеност по-малка от 400. Брой на точките – 5622



Г) Използват се точки с наситеност по-малка от 300. Брой на точките – 4950



Д) Използват се точки с наситеност по-малка от 200. Брой на точките – 4293



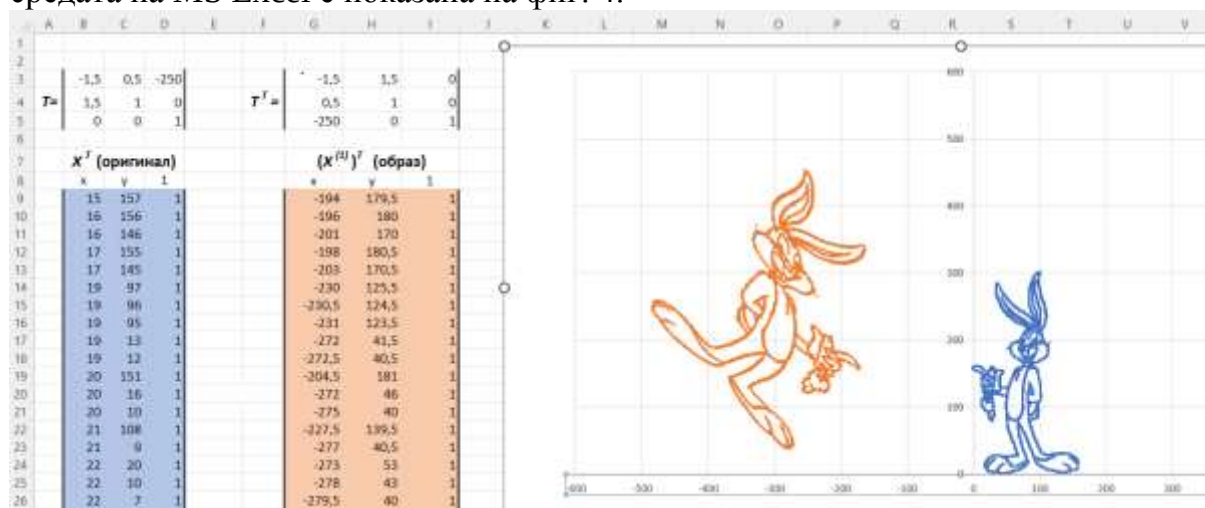
Е) Използват се точки с наситеност равна на 0. Брой на точките – 3633.

Фигура 3. Преобразуване на PNG формат в текстов файл.

Източник: Собствена разработка.

По подобен начин могат да се създадат различни изображения.

Примерна трансформация на изображение на друг анимационен герой в средата на MS Excel е показана на фиг. 4.



Фигура 4. Примерна трансформация

Източник: Собствена разработка.

Чрез съдържанието на клетки B3:D4 се задават параметрите на трансформацията. С добавяне на клетки B5:D5 се получава разширената матрица T . Като се използва функцията TRANSPOSE, матрицата T се транспонира в клетки G3:I5.

Хомогенните координати на точките, описващи оригинала се записват в клетки B9:D3641. Получената матрица се умножава с матрицата от клетки G3:I5 с помощта на функцията MMULT и резултатът се записва в клетки G9:I3641.

Графиките на оригинала и образа на обекта се получават с използване на диаграма на разсейване (scatter).

Заклучение

Показаният пример нагледно представя използването на операциите с матрици при създаване на образи на даден оригинал. Използването му в практическите занятия по линейна алгебра и аналитична геометрия спомага за повишаване на интереса на студентите към изучавания материал. Разработването на набор от такива нагледни примери и представянето им по време на лекции или упражнения създава положителни емоции у студентите.

Такива примери биха могли да бъдат използвани и като задачи за самостоятелна работа. В заданието може да се включи трансформирането на изображение в масив от координати на точки и създаване на оператори, които да извършат трансформация с предварително зададени параметри.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Andrilli, S., & Hecker, D. (2010). *Elementary Linear Algebra* (4th izd.). Elsevier Inc.
2. Gonzalez, R. C., & Woods, R. E. (2018). *Digital Image Processing*. New York: Pearson Education.
3. House, D. H., & Keyser, J. C. (2017). *Foundations of Physically Based Modeling and Animation*. Boca Raton: Taylor & Francis.
4. Madzharova, T. (2022). *Problems in Teaching of Mathematics in Engeneering Specialities at Nikola Vaptsarov Naval Academy*. Conference Proceedings: The Role of Fundamental Programs in Higher Education (pp. 55-60). Varna: University of Economics.
5. Penev, P. (2018). *Solving Linear Equations with Excel*. Mathematics and informatics. Vol. 61 (2), pp. 154-163

A PRACTICAL PROBLEM IN ANALYTIC GEOMETRY

Chief Assist. Prof. Yordan Petkov, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Assoc. Prof. Radan Miryanov, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *The report presents a possible application of the knowledge provided by the fundamental mathematical discipline “Linear Algebra and Analytic Geometry” in solving an informatics problem, more precisely, a Computer Graphics problem. In addition, the given task provides a good opportunity to exercise the theoretical statements related to vectors and an equation of a line in the plane.*

Keywords: *Interior point; Triangle; Analytical geometry; Computer graphics.*

JEL code: C60

ЕДНА ПРАКТИЧЕСКА ЗАДАЧА ПО АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

Гл. ас. д-р Йордан Петков
Икономически университет – Варна, България

Доц. д-р Радан Мирянов
Икономически университет – Варна, България

В последните години, при обсъждане съдържанието на учебните програми във висшите училища, все по-усилно се поставя въпросът за приложимост на получаваните знания и умения в практиката. Въпреки че по отношение на фундаменталните дисциплини необходимостта от обосновка на практическата полза е поражда дискусии, все по-често самите студенти задават въпроси от типа на „къде в практиката ще ни потрѣбват тези знания?“. В особена степен това важи по отношение на фундаменталните математически дисциплини в специалностите от направление 4.6. Информатика и компютърни науки, студентите в които трудно осъзнават, че математически инструментариум лежи в основата на множество (да не кажем на по-голямата част, дори на всички) алгоритми, функции или най-различни функционалности, които те използват наготово в съвременните софтуерни продукти и среди за разработка.

В тази връзка целта на авторите на настоящия доклад е да покажат една възможност за приложение на знанията, получени в курса по Линейна алгебра и аналитична геометрия, за решаване на конкретна информатична задача в областта на компютърната графика.

Изрично ще отбележим, че представената тук постановка е малка демонстрация на възможностите, които тази фундаментална математическа дисциплина предоставя, и съвсем не изчерпва значението ѝ в редица области на компютърните науки.

Задачата, поставяна на студенти в упражненията по Линейна алгебра и аналитична геометрия, е следната (Николаев и Господинова, 2014) - да се състави алгоритъм на програма, която изобразява триъгълник по координатите на трите му

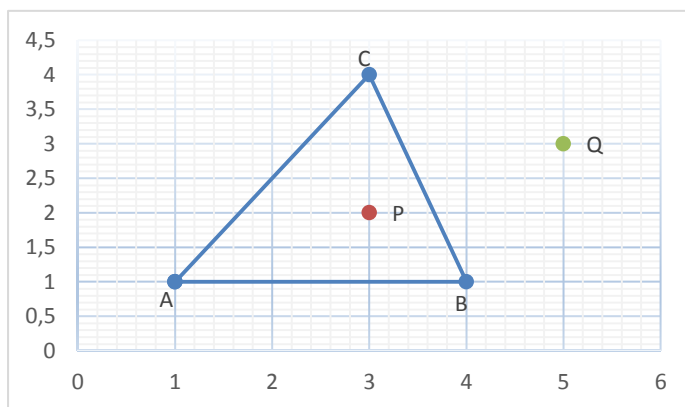
върха. При кликване с мишката във вътрешността или по контура на триъгълника, той да се оцветява в червено, при кликване с мишката извън триъгълника, той да се оцветява в синьо.

На поставената задача съответства следната математическа формулировка: дадени са координатите на върховете $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ на триъгълник ABC и на точка $P(x_0, y_0)$. Да се определи дали точката P лежи в или извън триъгълника (към случая, при който точка P лежи в триъгълника ще причисляваме и случаите, при които тя лежи и върху някоя от страните му).

Тук няма да разглеждаме известните алгоритми за запълване (оцветяване) на затворени фигури, като „метод на сканиращата линия“, „наводняващ алгоритъм“ и др., използвани в графичните софтуерни продукти, за които в интернет има достатъчно информация и разработени функционалности (Лазарова, 2013; Filled Area Primitives; Scan-line Polygon filling using OpenGL in C, 2022; Flood fill Algorithm – how to implement fill() in paint?, 2022; Boundary Fill Algorithm, 2024). Вниманието ни ще бъде насочено към начините за решаване на поставената задача чрез използване на учебния материал от темите „Вектори“ и „Аналитична геометрия в равнината“. Освен това ще представяме твърденията без доказателства, тъй като те следват непосредствено от известни теоретични постановки или лесно могат да бъдат изведени от тях,

Първи начин – чрез определяне на положението на точка P спрямо правите, върху които лежат страните на триъгълника. Точка P лежи в триъгълник ABC , ако за всяка от правите, минаващи през два от върховете му, тази точка и третият връх се намират в една и съща полуравнина на правата. Ако дори в един от трите случая третият връх и точката лежат в различни полуравнини, то P е извън триъгълника. За определяне на принадлежността на точката $L(m, n)$ към едната или другата полуравнина на правата с уравнение $l: ax + by + c = 0$ може да се използва знакът на ориентираното разстояние от тази точка до правата $\delta(L, l) = \frac{am + bn + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$ или просто знакът на израза $\partial(L, l) = am + bn + c$. Две точки лежат в една и съща полуравнина, ако знаците на δ или ∂ съвпадат и в различни полуравнини, ако знаците не съвпадат (Суружон и Запрянова, 2022).

Пример 1. Даден е триъгълник ABC с координати на върховете $A(1, 1), B(4, 1), C(3, 4)$. Да се определи дали всяка от точките $P(3, 2)$ и $Q(5, 3)$ лежи в или извън този триъгълник (фиг. 1).



Фиг. 1

Източник: Съставена от автора

Уравнението на правата AB , намерено през двете точки $A(1,1)$ и $B(4,1)$, е:

$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-1}{1-1} \Leftrightarrow y-1=0$. Тогава $\partial(C, AB) = 4-1=3 > 0$, $\partial(P, AB) = 2-1=1 > 0$ и $\partial(Q, AB) = 3-1=2 > 0$, следователно точки C , P и Q лежат в една и съща полуравнина спрямо правата AB (*).

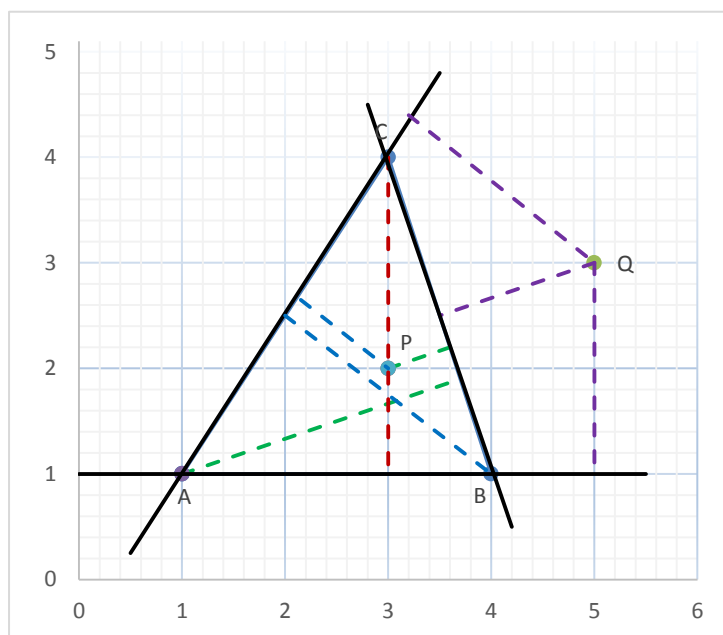
Уравнението на правата BC , намерено през точки $B(4,1)$ и $C(3,4)$, е:

$\frac{x-4}{3-4} = \frac{y-1}{4-1} \Leftrightarrow 3x+y-13=0$. Тогава $\partial(A, BC) = 3.1+1-13=-9 < 0$, $\partial(P, BC) = 3.3+2-13=-2 < 0$ и $\partial(Q, BC) = 3.5+3-13=5 > 0$, следователно точки A и P лежат в една и съща полуравнина спрямо правата BC , а точки A и Q лежат в различни полуравнини (**).

Уравнението на правата AC , намерено през точки $A(1,1)$ и $C(3,4)$, е:

$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{4-1} \Leftrightarrow 3x-2y-1=0$. Тогава $\partial(B, AC) = 3.4-2.1-1=9 > 0$, $\partial(P, AC) = 3.3-2.2-1=4 > 0$ и $\partial(Q, AC) = 3.5-2.3-1=8 > 0$, следователно точки B , P и Q лежат в една и съща полуравнина спрямо правата AC (***)

От (*), (**) и (***) следва, че точка P лежи в триъгълник ABC , а от (**) - че точка Q лежи извън него (фиг. 2).



Фиг. 2

Източник: Съставена от автора

Втори начин – чрез определяне на положението на всеки два от върховете на триъгълника спрямо правата, минаваща през точката P и през третия му връх. Точка P лежи в триъгълник ABC , ако за всяка от правите, минаващи през един от върховете му и през тази точка, другите два върха на триъгълника лежат в различни полуравнини на правата. Ако дори в един от трите случая другите два върха лежат в една и съща полуравнина, то P е извън триъгълника.

Пример 2. За триъгълник ABC и точки P и Q от пример 1 се получава:

Уравнението на правата AP , намерено през двете точки $A(1,1)$ и $P(3,2)$, е:

$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{2-1} \Leftrightarrow x-2y+1=0$. Тогава $\partial(B, AP) = 4-2.1+1=3>0$ и $\partial(C, AP) = 3-2.4+1=-4<0$, следователно върховете B и C лежат в различни полуравнини спрямо правата AP (#).

Уравнението на правата BP , намерено през точки $B(4,1)$ и $P(3,2)$, е:

$\frac{x-4}{3-4} = \frac{y-1}{2-1} \Leftrightarrow x+y-5=0$. Тогава $\partial(A, BP) = 1+1-5=-3<0$ и $\partial(C, BP) = 3+4-5=2>0$, следователно върховете A и C лежат в различни полуравнини спрямо правата BP (##).

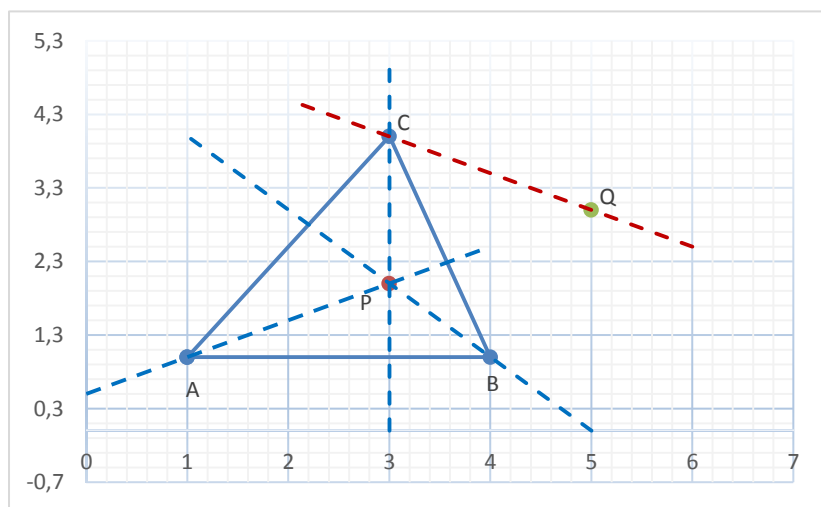
Уравнението на правата CP , намерено през точки $C(3,4)$ и $P(3,2)$, е:

$\frac{x-3}{3-3} = \frac{y-4}{2-4} \Leftrightarrow x-3=0$. Тогава $\partial(A, CP) = 1-3=-2<0$ и $\partial(B, CP) = 4-3=1>0$, следователно върховете A и B лежат в различни полуравнини спрямо правата CP (###).

От (#), (##) и (###) следва, че точка P лежи в триъгълник ABC (фиг. 3).

Уравнението на правата CQ , намерено през точки $C(3,4)$ и $Q(5,3)$ е:

$\frac{x-3}{5-3} = \frac{y-4}{3-4} \Leftrightarrow x+2y-11=0$. Тогава $\partial(A, CQ) = 1+2.1-11=-8<0$ и $\partial(B, CQ) = 4+2.1-11=-5<0$, т.е. върховете A и B лежат в една и съща полуравнина спрямо правата CQ , следователно точка Q е извън триъгълник ABC (фиг. 3).



Фиг. 3

Източник: Съставена от автора

Трети начин – чрез лица на триъгълници. Намират се лицата на триъгълниците ABC , ABP , BSP и ACP по координатите на техните върхове. Ако е изпълнено равенството $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABP} + S_{\triangle BSP} + S_{\triangle ACP}$, то точката P лежи в триъгълник ABC , в противен случай лежи извън него (Николаев и Господинова, 2014). За пресмятане на лице на триъгълник може да се използва формулата (Николаев и др., 2021).

$$S_{\Delta} = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|,$$

където $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ са координатите на трите му върха.

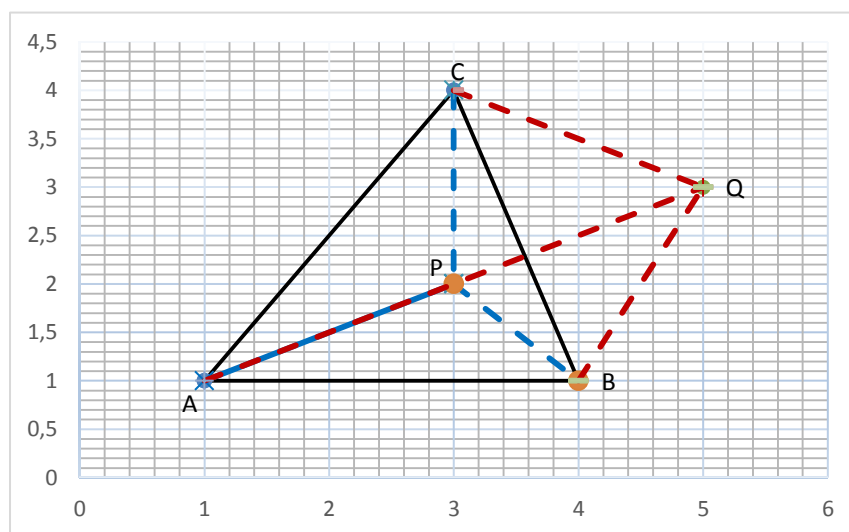
Пример 3. За триъгълник ABC и точки P и Q от пример 1 се получава:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4,5; \quad S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad S_{\triangle BCP} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,5; \quad S_{\triangle ACQ} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad S_{\triangle ABQ} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$S_{\triangle BCQ} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2,5.$$

Тъй като $9=4+2+3$, то точката P лежи в триъгълник ABC , тъй като $9 < 4+3+2,5$, то точката Q лежи извън триъгълник ABC (фиг. 4).



Фиг. 4

Източник: Съставена от автора

Четвърти начин – чрез изпъкнала линейна комбинация на върховете на триъгълника. Използва се известният факт, че изпъкнала линейната комбинация на три точки, нележащи на една права, е точка от вътрешността или от контура на триъгълника с върхове - тези три точки (Атанасов, Николаев и Мирянов, 2012). Ако точка P може да се представи, като изпъкнала линейна комбинация на върхните точки A , B и C , т.е. съществуват неотрицателни числа a , b и c , за които:

$$\begin{cases} a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) + c(x_3, y_3) = (x_0, y_0) \\ a + b + c = 1 \end{cases}, \quad (1)$$

то точка P лежи в триъгълник ABC , в противен случай лежи извън него.

Прилагането на метода изисква решаването на системата (1) и проверка, дали получените стойности на неизвестните a , b и c принадлежат на интервала $[0,1]$.

От второто уравнение на системата непосредствено може да се изрази $c = 1 - a - b$ и след заместване в първото уравнение се достига до системата

$$\begin{cases} a(x_1 - x_3) + b(x_2 - x_3) = x_0 - x_3 \\ a(y_1 - y_3) + b(y_2 - y_3) = y_0 - y_3 \end{cases},$$

откъдето, например чрез метода на Крамер (Суружон и Запрянова, 2022), за a , b и c се получава:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} x_0 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_0 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}}; b = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_0 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_0 - y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}}; c = 1 - a - b.$$

Пример 4. За триъгълник ABC и точка P от пример 1 се получава системата:

$$\begin{cases} a(1,1) + b(4,1) + c(3,4) = (3,2) \\ a + b + c = 1 \end{cases},$$

чието решение е

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 3-3 & 4-3 \\ 2-4 & 1-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-3 & 4-3 \\ 1-4 & 1-4 \end{vmatrix}} = \frac{2}{9}; b = \frac{\begin{vmatrix} 1-3 & 3-3 \\ 1-4 & 2-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-3 & 4-3 \\ 1-4 & 1-4 \end{vmatrix}} = \frac{4}{9}; c = 1 - \frac{2}{9} - \frac{4}{9} = \frac{3}{9}.$$

Тъй като $\frac{2}{9} \in [0,1]; \frac{4}{9} \in [0,1]; \frac{3}{9} \in [0,1]$, то точката P се представя като изпъкнала линейна комбинация на върховете A , B и C , следователно лежи в триъгълник ABC .

За точка Q от пример 1 се получава системата:

$$\begin{cases} a(1,1) + b(4,1) + c(3,4) = (5,3) \\ a + b + c = 1 \end{cases},$$

чието решение е

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 5-3 & 4-3 \\ 3-4 & 1-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-3 & 4-3 \\ 1-4 & 1-4 \end{vmatrix}} = -\frac{5}{9}; b = \frac{\begin{vmatrix} 1-3 & 5-3 \\ 1-4 & 3-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-3 & 4-3 \\ 1-4 & 1-4 \end{vmatrix}} = \frac{8}{9}; c = 1 - \left(-\frac{5}{9}\right) - \frac{8}{9} = \frac{6}{9}.$$

Тъй като $\frac{8}{9} \in [0,1]; \frac{6}{9} \in [0,1]$, но $-\frac{5}{9} \notin [0,1]$, то точката Q не може да се представи като изпъкнала линейна комбинация на върховете A , B и C , следователно тя лежи извън триъгълник ABC .

Пети начин – чрез линейна комбинация на два от векторите, съставлящи триъгълника. Използва се фактът, че ако $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$, където $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$, то векторът $\vec{c}$ лежи изцяло в триъгълника, образуван от векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (Weisstein). Прилагането на метода изисква решаването например на системата

$$\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1(x_2 - x_1) + \lambda_2(x_3 - x_1) = x_0 - x_1 \\ \lambda_1(y_2 - y_1) + \lambda_2(y_3 - y_1) = y_0 - y_1 \end{cases}. \quad (2)$$

и проверка дали получените стойности на λ_1 и λ_2 удовлетворяват условията $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$. Ако „да“, то точка P лежи в триъгълник ABC , в противен случай – точка P лежи извън него.

Решението на системата (2), намерено чрез формулите на Крамер, е:

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_0 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}; \lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_0 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_0 - y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}.$$

Пример 5. За триъгълник ABC и точка P от пример 1 се получава системата:

$$\begin{cases} \lambda_1(3-1) + \lambda_2(4-1) = 3-1 \\ \lambda_1(4-1) + \lambda_2(1-1) = 2-1 \end{cases},$$

чието решение е

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3}; \lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{4}{9}.$$

Тъй като $\frac{1}{3} \geq 0; \frac{4}{9} \geq 0$ и $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9} < 1$, то точката P лежи в триъгълник ABC (фиг.

5).

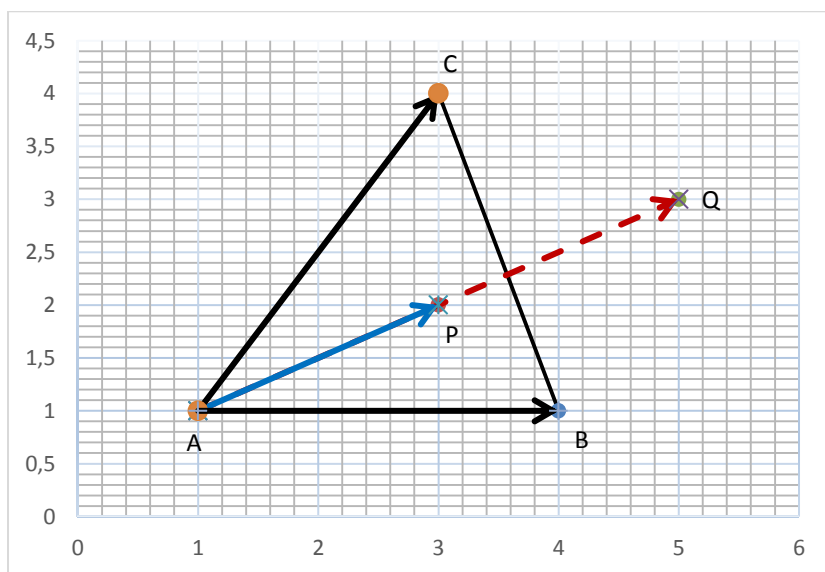
За точка Q от пример 1 се получава системата:

$$\begin{cases} \lambda_1(3-1) + \lambda_2(4-1) = 5-1 \\ \lambda_1(4-1) + \lambda_2(1-1) = 3-1 \end{cases},$$

чието решение е

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2}{3}; \lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{8}{9}.$$

Тъй като $\frac{2}{3} \geq 0; \frac{8}{9} \geq 0$, но $\frac{2}{3} + \frac{8}{9} = \frac{14}{9} > 1$, то точката Q лежи извън триъгълник ABC (фиг. 5).



Фиг. 5

Източник: Съставена от автора

Не е трудно да се покаже, че третият, четвъртият и петият начин на практика

са еквивалентни.

Шести начин – чрез ъгли. Намират се ъглите $\angle APB$, $\angle BPC$ и $\angle APC$. Ако сумата им е равна на 360° , то точката P лежи в триъгълник ABC , ако сумата им е по-малка от 360° , то точката P лежи извън триъгълник ABC . За пресмятане на трите ъгъла може да се използва формулата за ъгъл между два вектора

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \arccos \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}},$$

приложена към векторите $\vec{PA}$, $\vec{PB}$ и $\vec{PC}$ (Суружон и Запрянова 2022). Коректността на формулата изисква да се изключат случаите, при които точката P съвпада с някой от върховете на триъгълника, които така или иначе са тривиални и се установяват непосредствено.

Пример 6. За триъгълник ABC и точки P и Q от пример 1 се получава съответно:

$$\vec{PA} = (-2, -1); \vec{PB} = (0, 2); \vec{PC} = (1, -1); \angle APB = \arccos \frac{\vec{PA} \cdot \vec{PB}}{|\vec{PA}| \cdot |\vec{PB}|} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{5}} = 116,57^\circ;$$

$$\angle BPC = \arccos \frac{\vec{PB} \cdot \vec{PC}}{|\vec{PB}| \cdot |\vec{PC}|} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{2}} = 135^\circ; \angle APC = \arccos \frac{\vec{PA} \cdot \vec{PC}}{|\vec{PA}| \cdot |\vec{PC}|} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{10}} = 108,43^\circ;$$

$$\vec{QA} = (-4, -2); \vec{QB} = (-1, -2); \vec{QC} = (-2, 1); \angle AQB = \arccos \frac{\vec{QA} \cdot \vec{QB}}{|\vec{QA}| \cdot |\vec{QB}|} = \arccos \frac{8}{10} = 36,87^\circ;$$

$$\angle BQC = \arccos \frac{\vec{QB} \cdot \vec{QC}}{|\vec{QB}| \cdot |\vec{QC}|} = \arccos 0 = 90^\circ; \angle AQC = \arccos \frac{\vec{QA} \cdot \vec{QC}}{|\vec{QA}| \cdot |\vec{QC}|} = \arccos \frac{3}{5} = 53,13^\circ.$$

Тъй като $\angle APB + \angle BPC + \angle APC = 360^\circ$, то точката P лежи в триъгълник ABC , тъй като $\angle AQB + \angle BQC + \angle AQC < 360^\circ$, то точката Q лежи извън триъгълник ABC (фиг. 4).

В заключение ще отбележим, че представените примерни решения, без претенции, че са единствените възможни, показват, че:

- математическият апарат може да предостави силен инструментариум при конструиране на алгоритми за решаване на информатични задачи;
- подобни задачи от една страна могат да демонстрират възможности за приложение на фундаменталните теоретични постановки при решаването на практически проблеми, от друга – представляват добро упражнение върху разглеждания учебен материал.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Atanasov, B., Nikolaev, R., Miryanov, R. (2012) *Kolichestveni metodi v upravlenieto*. Varna: Nauka i iкономика, 425 s.
2. Nikolaev, R., Gospodinova, N. (2014) *Prilozhenie na matematicheskiJa aparat pri razrabotvane na algoritmi*. Varna: Nauka i iкономика, s. 403 - 410.
3. Nikolaev, R., Suruzhon, D., Stoyanov, T., Zapryanova, T., Milkova, T., Miryanov, R. (2021) *Prilozhna matematika*. Varna: Nauka i iкономика. 335 s.
4. Suruzhon, D., Zapryanova, T. (2022) *Linejna algebra i analitichna geometriya*. Varna: Nauka i iкономика, 413 s.

5. Weisstein, E. W. Triangle Interior. [online] From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. Available at: <https://mathworld.wolfram.com/TriangleInterior.html> [Accessed 01.11.2024].
6. Lazarova, M. (2013). Osnovni algoritmi za rasterizirane. [online] Available at: https://schupen.net/lib/tu/KST_all/Semesters/semestar%207/KG/lecs%20new/09.KG2013_9_Curves.pdf, [Accessed 01.11.2024].
7. Filled Area Primitives. [online] Available at: <https://www.javatpoint.com/computer-graphics-boundary-filled-algorithm>, [Accessed 01.11.2024].
8. Scan-line Polygon filling using OpenGL in C. (2022) [online] Available at: <https://www.geeksforgeeks.org/scan-line-polygon-filling-using-opengl-c/> [Accessed 01.11.2024].
9. Flood fill Algorithm – how to implement fill() in paint? (2022). [online] Available at: <https://www.geeksforgeeks.org/flood-fill-algorithm-implement-fill-paint/> [Accessed: 01.11.2024].
10. Boundary Fill Algorithm (2024). [online] Available at: <https://www.geeksforgeeks.org/boundary-fill-algorithm/> [Accessed 01.11.2024].

ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF BETA AND SIGMA CONVERGENCE ANALYSIS IN THE STUDY OF STRUCTURAL CONVERGENCE OF ECONOMIES

Chief Assist. Prof. Silvia Gospodinova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *Through β and σ convergence analysis, the real convergence in the economies of the European Union can be traced. For this purpose, the main criteria for convergence policies are sought and shown, as well as their results, as this is important for the efficiency and competitiveness of these economies. The task of this type of analysis is to trace the extent to which convergent policies create trends and change policies in individual countries, because sometimes countries take decisions that differ from the single policy of the European Community. When carrying out this type of analysis, it is necessary to know the advantages and disadvantages of each of the methods and indicators for analysis and to assess in the specific situation which is more reliable.*

Keywords: *Structural convergence; β & σ convergent analysis*

JEL code: *F02, F15, O47*

ПРЕДИМСТВА И НЕДОСТАТЪЦИ НА БЕТА И СИГМА КОНВЕРГЕНТНИЯ АНАЛИЗ ПРИ ИЗСЛЕДВАНЕ НА СТРУКТУРНАТА КОНВЕРГЕНЦИЯ НА ИКОНОМИКИТЕ

Гл. ас. д-р Силвия Господинова
Икономически университет - Варна, България

Въведение

Анализът на структурната конвергенция се изразява в това да се оцени достатъчно точно нейното съществуване и интензивност, което да даде цялостна представа за нея. Това е възможно да се случи само при правилен подбор на конкретни методи и подходи за нейното изследване. Целта е да се получават достатъчно надеждни и точни резултати за степента и динамиката на конвергенция въз основа на избраните подходи и конкретна методология за анализ. За да се осигури надеждност на анализа преди всичко е необходимо да се изберат изследователски методи, които да отговарят на следните условия: да съответстват на теоретичните концепции, да отчитат възможностите на статистическите и иконометричните методи и същевременно да са съобразени с конкретните цели и задачи на изследването. Много от методите са универсални и дават възможност да се използват за изследване на различни аспекти на структурната конвергенция, но голяма част от тях са предназначени за измерване на номиналната и реалната конвергенция, а не на структурната, което налага известна трансформация в тях. Друга особеност на методологията е, че по същество тя е създадена за измерване на степента на конвергенция между региони и други административни единици в икономиките, а доста често тя се прилага, с цел установяване конвергенцията между страни.

За да се гарантира, че резултатите от анализа ще са достатъчно надеждни е

полезно конвергенцията да се проследи в динамика, а така също и да се направят сравнения със структурната конвергенция на други икономики със сходни характеристики. Сравнителният анализ дава възможност да се оцени позицията и готовността на дадена страна за задълбочаване на интеграцията през погледа на уязвимостта ѝ към външни шокове и реакцията ѝ към конкретни наднационални политики. При извършване на анализ на структурната конвергенция следва да сме наясно с предимствата и недостатъците на всеки от възможните показатели и методи за анализ и да сме внимателни при тълкуването на получените резултати.

Предимства и недостатъци на методите и показателите за анализ

Разпределителният подход за измерване на конвергенцията дава представа за намаляването на различията между държавите с течение на времето и за разлика от подхода на догонващото развитие не следва определена теоретична схема, а разчита предимно на използването на статистически методи. Централно място в него заемат стандартното отклонение, дисперсията и коефициентът на вариация. Намаляването им във времето говори за съкращаване на отклоненията и доказва наличието на конвергенция.

Разпределителният подход за анализ, известен в теорията като сигма конвергенция, е подробно доказан от Barro & Sala-i-Martin. Според Friedman (1992) и Quah (1993), този подход е по-предпочитан в повечето емпирични изследвания и най-вече в тези, които са концентрирани върху конвергенцията на доходите, тъй като е по-лесен за използване. Друго основание за неговото използване е, че той е много по-близък до концепцията за конвергенция. Тази му особеност обаче, е причина Young & Higgins & Levy (2007) да заключат, че бета конвергенцията е необходимо, но недостатъчно условие за наличие на сигма конвергенция. Причина за това е, че в процеса на догонване могат да възникнат случайни шокове, които да отдалечат икономиката от пътя ѝ на развитие и да попречат за намаляване на разликата с по-напредналите икономики.

По същество сигма конвергенцията отразява тенденцията на сближаване или раздалечаване между показателите в извадка от държави. За да се преодолеят тези различия е необходимо страните с изоставащи показатели да нарастват по-бързо, отколкото останалите с по-високи показатели, т.е. трябва да съществува β -конвергенция. Следователно σ -конвергенцията е необходимо, но не и достатъчно условие за сближаване. По-конкретно наименованието на σ -конвергенцията произлиза от коефициента на дисперсия и се изчислява по следната формула:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{cp.})^2 \quad (1)$$

където y_i е даденото равнище на показателя в страна i , а $y_{cp.}$ средното равнище за дадената общност (например, Еврозоната), изчислено по следния начин:

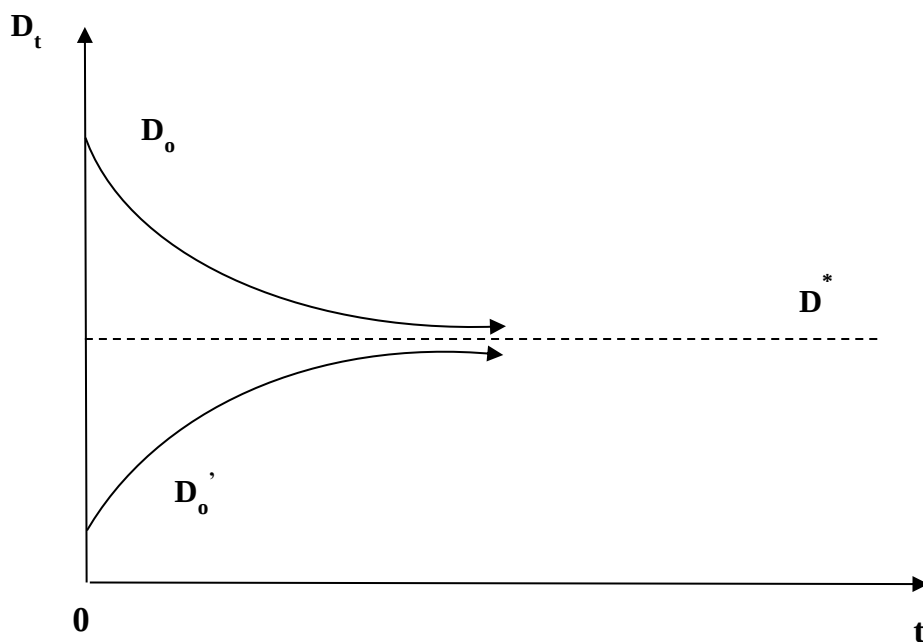
$$y_{cp.} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (2)$$

Така чрез коефициента на дисперсия може да се оцени σ -конвергенцията в ЕС на база на следната формула:

$$D_t = \frac{\sigma^2}{y_{cp.}} \quad (3)$$

Що се отнася до структурната конвергенция, разпределителният подход

помага да се измери равнището и динамиката на различията в структурата на отделни показатели в икономиката, като ако те намаляват, това е признак за наличие на структурна конвергенция. В този смисъл, Palan (2013) твърди, че сигма конвергенцията подобно на бета конвергенцията, също може да бъде абсолютна или условна, като и в двата случая тя се измерва в съответствие с дългосрочния модел на специализация на икономиките доказан от Baumol (1986) и Galor (1996). Galor определя абсолютната и условната конвергенция като сближаване между икономиките, което е независимо от първоначалните условия във всяка от тях, а за условната конвергенция поставя и допълнително условие за сходство на други основни характеристики на икономиките по идея на моделите на растежа.



Фиг. 1. Сигма конвергенция на икономики, започваща от две различни начални точки

Източник: Рангелова (2021), с. 20.

Това е важно за по-ясното разграничаване на условната от т.нар. клубна конвергенция, която е свързана с намаляване на различията между група държави със сходни характеристики, за които са налице еднакви първоначални условия.¹

Тези два метода за анализ на структурната конвергенция са и най-често използваните. Основанията те да се използват заедно са, защото са най-близки до разбирането за конвергенция, застъпвано в основните модели за икономически растеж. От практическа гледна точка тези два метода имат сравнително универсално приложение и могат да се използват както за анализ на конвергенцията на производството, така и на пазара на труда. Използването и на двата подхода за анализ едновременно позволява получаването на алтернативни оценки за структурната конвергенция, но същевременно това може и да размие анализа и дори да доведе до разминаване или несъответствие между оценките.

Степента на β конвергенцията може да се оценява и анализира общо за страните чрез панелни модели с фиксирани ефекти и да се сравнява с резултатите от σ конвергенцията измерена посредством агрегирани индекси на дивергенция,

различие и дистанция.

Алтернативен начин е структурната конвергенция да се измери чрез индекса на специализация на Кругман, който показва отклонението в структурно отношение на икономиката относно брутната добавена стойност или заетостта, в сравнение със средната за групата или за Евроразоната. Той първоначално е разработен от Krugman (1993) в по-елементарен вид, а в последствие използван в различни форми от Kallioras и Petrakos (2007), както и от Stattev и Raleva (2006) за измерване на конвергенцията в производствената и разходната структура на БВП на България спрямо Евроразоната.

$$I_{\text{Кругман}} = \sum_{i=1}^n |RSE_{y_i} - RSE_{\bar{y}}| \quad (4)$$

където: RSE_{y_i} е относителния дял на съответния структурен елемент в дадената страна, $RSE_{\bar{y}}$ е референтната стойност, която се приема за равна на относителния дял на съответния елемент в Евроразоната, а n е броя на елементите в дадената структура.

Индексът е предназначен за измерване специализацията на страните, но често се използва и за оценка на степента на конвергенция. Krieger-Boden & Traistaru-Siedschlag (2008) го критикуват, тъй като една от особеностите му е, че приема едни и същи тегла на компонентите, независимо от техния размер. За негово предимство се приема възможността да се използва както на секторно равнище, така и при по-ниски нива на обобщеност. Нещо повече, според Palan (2013) преминаването от по-високо към по-ниско ниво на агрегиране не влияе на резултатите от специализацията, ако отклоненията от референтните стойности при съставлящите ги дейности са в една и съща посока. Ако тези отклонения обаче са в различни посоки, равнището на специализация намалява, което говори за увеличаване на структурната конвергенция.

Според Von Hagen & Traistaru (2005) структурната конвергенция следва да се изчислява чрез индекс на различието въз основа на оригиналната формула на Кругман, и като се проследи неговото развитие във времето. Индексът е предназначен точно за измерване на структурната конвергенция на една страна към Евроразоната и се изчислява по следната формула, в която означенията са аналогични на тези в предходната:

$$I_{\text{DISSIM}} = - \sum_{i=1}^n |RSE_{x_i} - RSE_{EZ}| \quad (5)$$

Превръщането на индекса на специализация в индекс на различие е свързано с добавяне на отрицателен знак пред взетата по абсолютна стойност сума на отклоненията за всеки от секторите. Това променя, начина по който се интерпретира индекса, тъй като колкото по-висока е стойността му, т.е. колкото по-ниска е абсолютната му стойност, толкова по-малко е различието и по-голяма е структурната конвергенция.

Друг показател, основан отново върху индекса на специализацията на Кругман, е индексът на дивергенцията, предложен от Van de Coeving (2003). Този индекс е изчислен от автора за ЕС и страните от Югоизточна Европа (без България), САЩ и Япония, като последните две страни са използвани за сравнение. Индексът се изчислява по следната формула:

$$I_{DIV} = - \sum_{i=1}^n \frac{(RSE_x - RSE_{EZ})^2}{RSE_{EZ}} \quad (6)$$

Ако индексът е нула, относителният дял на съответния елемент се променя както в Евразоната, а ако индексът е различен от нула, относителният дял се отклонява от този на Евразоната, и колкото по-висока е стойността на индекса (колкото по-ниска е абсолютната стойност), толкова по-голяма е структурната конвергенция на съответната държава към Евразоната. Индексът приема само отрицателни стойности и колкото по-близо е до нула, толкова по-сходни са сравняваните икономически структури. Повдигането на втора степен на разликата между относителния дял на дадената променлива за съответната страна и Евразоната определя много по-голямото тегло в индекса на елемента с най-значително изменение. Това обаче може да е проблем, ако индексът на дивергенцията зависи от елементите в съвкупността, които са с най-голяма динамика, когато относителното им тегло в изследваната съвкупност е най-ниско. По този начин, от една страна чувствителността на индекса се увеличава, но в същото време се преодолява недостатъка на индекса на различието, което прави индекса на дивергенцията по-предпочитан за използване от двата. При достигане на различни заключения за процесите на конвергенция (дивергенция) от двата индекса, което е възможно поради методологичните разлики между тях, наличието на конвергенция или дивергенция обикновено се смята за доказано, ако се потвърждава и от двата показателя.

Алтернатива на индекса на различие и индекса на дивергенция е индекс на несъответствие в производствената структура, въведен от Cuadrado-Roura и колектив (1999).

$$I_{IPS} = \sum_{i=1}^n (RSE_x - RSE_{EZ})^2 \quad (7)$$

Означенията в него са същите, а разликата му с индекса на Кругман е в повдигането на втора степен на разликата между относителния дял на променливата за съответната страна и същата за Евразоната. По този начин той е по-близък до индекса на дивергенция като повтаря и неговите особености, но при него няма знаменател, което води до още по-значителна роля на елемента с най-голяма промяна в сравнение с индекса на дивергенцията. При него липсва и отрицателния знак, което значи, че структурна конвергенция ще е налице, когато той намалява във времето.

По подобен начин Angeloni, Flag и Mondelli (2005) измерват сигма конвергенцията на икономиките на новите страни-членки на ЕС като прилагат индекс на дистанция.

$$I_{DIST} = \sum_{i=1}^n \frac{|RSE_x - RSE_{EZ}|}{2} \cdot 100 \quad (8)$$

Той също е индекс произведен от индекса на специализация на Кругман, чиято стойност е положителна и два пъти по-ниска, и за разлика от индекса на Кругман се изчислява в проценти. Ако стойността на индекса е равна на нула, това показва, че сравняваните икономики имат еднаква структура, а ако стойността му

расте това говори за структурна дивергенция и обратно, ако намалява – за структурна конвергенция.

В допълнение към тези индекси, за измерване на конвергенцията и дивергенцията се използват също така индекса на Theil, на Herfindahl-Hirschman, на Atkinson, коефициентът на Джини, индекса на диверсификацията и др. Те най-често се прилагат за измерване на специализацията и концентрацията и по-рядко за оценка на конвергенцията. Използвани са в изследванията на Monfort (2008) за измерване на реалната конвергенция и за структурната конвергенция при Palan (2013).

Голямото разнообразие от индекси за оценка на конвергенцията/дивергенцията налага да се избират само тези от тях, които дават достатъчно ясна представа за анализирания процес и същевременно имат най-малко недостатъци. Това е необходимо, тъй като, ако се използват всичките, това ще разконцентрира анализа и ще измести фокуса на изследването.

Заедно с тези индекси анализът на структурната конвергенция може да бъде допълнен от дескриптивен анализ на база на графично и таблично представяне на данните, като така се извеждат основните тенденции в измененията на изследваните показатели за съответната страна и Евророната за дадения период. За да може да се определи развитието на конвергентните процеси в конкретна страна, данните за нея следва да се сравняват с друга, сходна по характеристики държава.

Заклучение

Изследванията на структурната конвергенция са свързани с прилагането на методите на сигма и бета конвергенцията. Измерването на сигма конвергенцията се основава на проследяване във времето на стойностите на показателите, които измерват различията между икономиките каквито са индексът на дивергенция или специализация и индекса на различие. Всички те имат различни характеристики и свои предимства и недостатъци, които определят и тяхната различна приложимост при извършването на изследванията. Ето защо е важно да се подберат по подходящ начин тези от тях, които ще подпомогнат постигането на поставените в конкретното изследване цели и задачи. Комбинирането им позволява емпирично да се проверят постулатите на основните теоретични модели на бета и сигма конвергенцията и след това да се сравнят. Освен това панелното моделиране (бета конвергентния анализ) дава възможност за изясняване на позицията на страната спрямо другите държави, с които се сравнява ситуацията, а едновременно използване на индексите спомага за получаване на по-цялостна представа за наличието на сигма конвергенция.

Подходът на бета-конвергенцията пък установява процеса на конвергенция, оценява скоростта му, и в комбинация с панелното моделиране, позволява сравнителен анализ на структурната конвергенция в отделните държави. Същевременно резултатите от него се влияят от допускането за безусловност или условност на конвергенцията, от включването на допълнителни променливи при условната конвергенция, както и от наличието или отсъствието на вътрешна зависимост между икономиките. Разпределителният метод може да се използва за определяне на структурните различия между страните във времето, както и за разкриване на равнището и динамиката на тези различия чрез индекси. Анализът на динамични редове позволява да се изследват дългосрочните зависимости и да се ендогенизират променливите, но при него може да има и някои трудности при избора на тестове за стационарност.

Що се отнася до подбора и прилагането на основните показатели е добре да се следва принципът да се използват такива измерители, които дават възможно най-пълна и същевременно детайлна представа за структурната конвергенция. От методологична гледна точка анализът доста често се основава на годишни данни. При такива проучвания годишните данни са предпочитани, тъй като при тях няма проблем с цикличността. Дескриптивният анализ, основаван най-вече на таблично и графично представяне на статистическите данни очертава основните тенденции в динамиката и относителните дялове на изследваните показатели в различните страни, както и дава представа за съществуващите съответствия и връзките между тях. В рамките на дескриптивния анализ се прилага и методът на сигма конвергенцията за измерване на хетерогенността в конкретните показатели на секторно равнище. Изводите направени чрез един дескриптивен анализ относно наличието или отсъствието на дивергенция не могат да бъдат абсолютизирани, и затова той се допълва от анализ, използващ метода на бета конвергенцията.

С използването на методите на σ и β конвергенцията може да се разкрие наличието на значителна междусекторна конвергенция или вътрешносекторната конвергенция, както и да се установяват тенденциите на развитие. Благодарение на тях може да се анализират факторите и политиките, които правят икономиките по-конкурентоспособни и дават възможност за по-добро икономическо развитие, а също така те позволяват на държавите на база на този вид анализ да постигат високо равнище на растеж на БВП, да подобрят стандарта на живот, да осигурят възможности за заетост и да намалят бедността и неравенството.

БЕЛЕЖКИ

1. Теорията разграничава три вида β -конвергенция: **безусловна (абсолютна)**, при която доходите на глава от населението в различните страни се сближават едни към други в дългосрочен план *независимо от първоначалните им равнища*; **условна** – при нея страни със сходни структурни характеристики (като темп на нарастване на населението, технологично развитие, правителствени политики и др.), се сближават по отношение на доходите на глава от населението в дългосрочен план, като страните с първоначално по-ниски нива на дохода постигат по-висок икономически растеж и се доближават до доходите на по-богатите страни; **клубна конвергенция** – тя е налице, когато *държави от една група със сходни първоначални равнища на доходите и близки структурни характеристики*, се сближават в дългосрочен план едни до други с течение на времето.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Рангелова, Р. и др. (2021). Икономически растеж и конвергенция в Европейския съюз, Издателство на БАН „Проф. Марин Дринов“, София, 146 с.
2. Angeloni, I., Flad. M., Mongelli, F. (2005), Economic and Monetary Integration of the New Member States. Helping to Chart the Route, European Central Bank Occasional Paper Series, No 36, p. 30-45.
3. Barro, R. T., Sala-i-Martin, X. (1992). Convergence, Journal of Political Economy, 100(2), pp. 223-251.
4. Baumol, W. (1986). Productivity Growth, Convergence, and Welfare, What the Long-Run Data Show, American Economic Review, 76(5), pp. 1072-1085.

5. Cuadrado-Roura, J. R., García-Greciano, B., & Raymond, J. L. (1999). Regional convergence in productivity and productive structure: The Spanish case. *International Regional Science Review*, 22(1), 35-53.
6. Friedman, M. (1992). Do Old Fallacies Ever Die? *Journal of Economics Literature*, 30, pp.2129-2132.
7. Galor, O. (1996). Convergence? Inferences from Theoretical Models, *Economic Journal*, Vol. 106, Issue 437, pp. 1056-1069.
8. Kallioras, D., Petrakos, G. (2007). Industrial Growth, Integration and Structural Change: Evidence from the European Union New Member States' Regions, Discussion Paper Series, 13(4), March, pp. 93-114.
9. Krieger-Boden, Ch., Traistaru-Siedschlag, I. (2008). Regional Structural Change and Cohesion in the enlarged European Union: An Introduction in Krieger-Boden, Ch., Morgenroth, E., Petrakos, G. (eds.) *The Impact of European Integration on Regional Structural Change and Cohesion*, London: Routledge.
10. Krugman, P. (1993). Lessons of Massachusetts for EMU. In Torres, F., Giavazzi, F. (Eds.). *Adjustment and Growth in the European Monetary Union*. Cambridge University Press, pp. 241–261.
11. Monfort, Ph. (2008). Convergence of EU Regions. Measures and Evolution, EU Regional Policy Working Papers, №1.
12. Palan, N. (2013). Structural Change and Convergence: An Empirical Analysis of Production Structures in Europe, Frankfurt am Main: Peter Lang Economic Research, 3433.
13. Quah, D. (1993). Galton's Fallacy and the Convergence Hypothesis. *Scandinavian Journal of Economics* 95, pp. 427-443.
14. Stattev, St., Raleva, St. (2006) Bulgarian GDP Structures – Convergence with the EU. *South-Eastern Europe Journal of Economics*, 4(2), pp.193-207.
15. Van de Coevering, C. (2003). Structural Convergence and Monetary Integration in Europe. MEB Series 2003-20, December.
16. Von Hagen, J., Traistaru, J. (2005). Macroeconomic Adjustment in the New EU Member States, ZEI Working Paper, B 01.
17. Young, A., Higgins, M., Levy, D. (2007). Sigma Convergence versus Beta Convergence: Evidence from U.S. Country-Level Data, MPRA Paper 2714, [online] Available at: https://mpra.ub.uni-muenchen.de/2714/1/MPRA_paper_2714.pdf.

“LOST GENERATION” IN BULGARIA – DEVELOPMENT AND FORECAST

Chief Assist. Prof. Vanya Stoyanova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *The report looks at the “lost generation” – those who are not employed and not in education – as a potential opportunity to increase the labor force. The development of this social group for the period 2018 – 2024 is under consideration. A forecast is made using an adaptive exponential smoothing model.*

Keywords: *Lost generation; NEET; Adaptive exponential smoothing*

JEL code: *J01*

„ЗАГУБЕНОТО ПОКОЛЕНИЕ“ В БЪЛГАРИЯ – ИЗМЕНЕНИЕ И ПРОГНОЗА

Главен асистент, доктор Ваня Стоянова
Икономически университет – Варна, България

В последните години все по-често се обръща внимание на недостига на работна сила. Този проблем не може да се определи като национален, защото се среща в повечето държави в Европа, а и в световен план. Причините за това следва да се търсят в застаряването на населението, в миграционните процеси, но и като следствие от индивидуални решения. Държавното управление е изправено пред необходимостта да търси различни възможности за увеличение на работната сила. Една такава възможност е свързана с пенсионната реформа и увеличението на възрастта за пенсиониране, но това не води до реален ръст на работната сила, а само до по-продължителното ѝ използване. Друга възможност е свързана с мерки за насърчаване на пълната заетост. В същото време официалната статистика отчита една категория лица, определена от някои изследователи като „изгубено поколение“ – това са млади хора на възраст до 29 години, които не учат и не работят. И националната статистика в лицето на НСИ, и Евростат измерват и отчитат изменението на относителния дял на тази социална група.

Според икономическата теория и според препоръките на Международната организация на труда, в ЕС за безработно лице се счита всеки, който няма работа, иска да работи и активно търси работа. Съгласно това определение лицата, които не работят и не търсят работа не са част от безработните и не попадат в състава на работната сила. Те са част от трудовите ресурси на страната и могат да се разглеждат като потенциална възможност за увеличение на работната сила.

В таблица 1 са представени лицата извън работната сила според желанието и нежеланието им да работят и причините за това.

Таблица 1

Лица извън работната сила по причини за неактивност

Причини за неактивност	Общо (хил. д.)	Мъже (хил. д.)	Жени (хил. д.)
Общо	1030,2	449,9	580,2
Желаещи да работят в т. ч.	96,7	46,5	50,2
обезкуражени	20,8	11,8	9,0
участие в обучение	7,8	5,0	2,8
заболяване	2,6	1,8	0,8
лични и семейни	34,1	12,8	21,2
Нежелаещи да работят в т. ч.	933,5	403,5	530,0
участие в обучение	435,3	215,5	219,7
заболяване	128,9	65,9	63,0
лични и семейни	232,8	65,8	167,1
пенсиониране	116,3	46,2	70,2

Източник: НСИ

Сред желаещите да работят лица извън работната сила има почти 21 хил. д., които се определят като обезкуражени поради невъзможността да намерят реализация. Независимо, че не могат да бъдат причислени към безработните лица, те могат да се разглеждат като последица от продължителната безработица, която остава невидима при икономическите анализи на последствията от наличието на циклична безработица. Държавните мерки, както и европейските програми за насърчаване на заетостта не се прилагат спрямо обезкуражените лица, защото те остават извън състава на безработните и в отчетността на официалната статистика, и на Агенцията по заетостта. Впечатление прави, че сред нежелаещите да работят лица е значителен броят на тези, които посочват лични причини за това. В тези две групи – на обезкуражените и на нежелаещите да работят поради лични причини попадат и лицата до 29 години, които не работят и не учат (neither in employment nor in education and training – NEET).

В редица публикации на Европейската комисия (2020) се разглеждат проблемите на тази група лица и начините и средствата, необходими за решаването на тези проблеми. В своето изследване Bacher and Tamesberger (2020) също наблюдават и прогнозираят тази част от младите хора и на базата на направени от тях прогнози формулират твърде обезпокоителен извод, че дори и при благоприятен сценарий на прогнозата нивото на младите хора от тази група ще бъде исторически високо. В изследванията на Allegretto (2013) и Scarpetta (2010) е установена зависимост между периода на безработица в млада възраст и негативни последици по-късно, като за описание на тази връзка се използва термина „lost generation”. De Fraja (2017) прави извод, че един месец безработица на възраст 18-20 може да доведе до 2% загуба на доход по-късно.

Данните за относителния дял на лицата на възраст 15-29 г., които нито работят, нито учат (NEET) в България за периода 2018 – 2024 година по тримесечия са представени в следващата таблица.

Таблица 2

Относителен дял на лицата на възраст 15 – 29 год. NEET в България

Периоди	Относителен дял (%)	Периоди	Относителен дял (%)
I 2018	18,2	II 2021	18,0
II 2018	18,2	III 2021	16,4
III 2018	18,5	IV 2021	17,0
IV 2018	17,4	I 2022	15,8
I 2019	16,7	II 2022	14,6
II 2019	16,2	III 2022	14,5
III 2019	16,8	IV 2022	14,4
IV 2019	17,5	I 2023	14,1
I 2020	18,3	II 2023	14,4
II 2020	19,0	III 2023	14,0
III 2020	18,1	IV 2023	12,8
IV 2020	17,4	I 2024	12,8
I 2021	18,0	II 2024	11,8

Източник: Eurostat

За периода от 2018 година до второто тримесечие на 2021 година относителният дял на лицата NEET е почти постоянна величина, като едно възможно обяснение за това е COVID 19-кризата и мерките наложени заради нея. От третото тримесечие на 2021 година до края на разглеждания период относителният дял на тази социална група намалява, като следва да се отбележи, че през този период намалява и равнището на безработица в България. За нашата страна не се потвърждава прогнозата на Bacher and Tamesberger за увеличаване на относителния дял на младите хора NEET и едва ли може да се говори за „исторически високи“ нива.

За осъществяване на прогноза на лицата в тази социална група избраният метод е този на адаптивното експоненциално изглаждане. Причините за избор точно на този метод се свеждат до:

- динамичният ред, който описва относителния дял на лицата NEET е кратък и е трудно да се определи тенденция на изменение;
- динамичното изменение на изходните условия предполага при прогнозирането да се дава по-голяма тежест на последните елементи на динамичния ред.

Изброените причини определят метода на адаптивното експоненциално изглаждане като подходящ за прогнозиране при тези условия. Приложението на този метод изисква решаването на два въпроса. Първият е свързан с определяне на начално условие на изглаждането, а вторият – с определяне на параметър на модела. За решение на първия въпрос в литературата се предлагат няколко варианта. Единият от тях предлага възприемането на първата изгладена стойност от емпиричните данни като начално условие за експоненциалното изглаждане. Вторият се свежда до възприемане на средната аритметична стойност от първите няколко члена на изходния ред за начално условие. В случаите, когато съществуват данни преди началния момент, в който започва изглаждането, за начално условие се приема средната аритметична стойност от всички предходни членове на реда. Третата възможност е да се приеме за начално условие първата изгладена стойност с помощта на подходящ трендови модел, като в този случай адаптивността на модела

нараства с прехода от избора на първата емпирична стойност към първата изгладена стойност като начално условие. Поради тази причина в настоящото изследване се отдава предпочитание точно на тази възможност за определяне на начално условие на изглаждането.

За решаване на втория въпрос, свързан с избор на начален параметър на адаптация, лесно и обосновано е този избор да се направи с подходящ статистически софтуер на базата на предварително определен критерий. Ролята на такъв критерий може да се изпълнява от някой от следните показатели:

- средна грешка (ME) – средна стойност от разликите между членовете на изходния ред и експоненциалните средни;
- средна абсолютна девиация (MAD) – средна стойност от абсолютните разлики между членовете на изходния ред и експоненциалните средни;
- средна квадратична грешка (MSE) – средна стойност от квадратите на разликите между членовете на изходния ред и експоненциалните средни;
- квадратен корен от средната квадратична грешка (RMSE) – това е стандартната грешка;
- процентна грешка (PE) – съотношение между грешката в съответния момент и емпиричното значение за същия момент;
- средна процентна грешка (MPE) – средна стойност от изчислените процентни грешки.

Тъй като няма единно мнение кой точно критерий би довел до по-добри резултати изборът на критерий следва да се осъществява на базата на поставените цели и на базата на използваната техника за адаптация на параметъра на изглаждането. При прогнозирането на относителния дял на лицата NEET за третото тримесечие на 2024 година като критерий за избор на параметър на изглаждането е избрана процентната грешка.

Адаптивните модели на експоненциалното изглаждане могат да се разделят в две групи според това дали параметърът на изглаждане се променя. В настоящия доклад се използват модели с промяна на параметъра на изглаждането, тъй като те са по-чувствителни към измененията на фактическите равнища на реда. В случаите на рязко импулсно изменение тези модели реагират на грешката и в зависимост от нейната величина се изменя и параметъра на изглаждането, което осигурява по-добра адаптивност на модела.

Използваният модел е на простото експоненциално изглаждане, тъй като наблюдаваният динамичен ред е къс и е трудно да се установят трендови и сезонни изменения. Моделът има следния вид:

$$Q_t = \alpha \cdot Y_t + (1 - \alpha) \cdot Q_{t-1}$$

където:

Y_t е емпиричната стойност в момент t ;

Q_t е експоненциално изгладената стойност в момент t ;

Q_{t-1} е експоненциално изгладената стойност в предходния момент $t-1$;

α е параметър на изглаждането.

Таблица 3

Прогнозни стойности

Варианти на прогноза за III 2024	Песимистичен	Реалистичен	Оптимистичен
Лица NEET	11,6	11,2	10,7

Източник: Изчисления на автора

Изменението на работната сила се влияе от редица фактори, някои от които могат да бъдат предвидени, но други се проявяват като шок. Противоедействието на негативните последици от това влияние може да се осъществи чрез реформи и мерки на държавната политика, но не трябва да се забравят и потенциалните възможности за естествено увеличение на работната сила чрез изменение на структурата на трудовите ресурси.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Allegretto, S. A. (2013) U. S. Youth: A Lost Generation in the Making? Available at <https://www.intereconomics.eu/contents/year/2013/number/5/article/us-youth-a-lost-generation-in-the-making.html> /Accessed 28 October 2024/
2. Bacher, J., D. Tamesberger (2020) COVID 19 Crisis: How to Avoid a “Lost Generation” Available at <https://www.link.springer.com/article/10.1007/s10272-020-0908-y> /Accessed 23 October 2024/
3. De Fraja, G., S. Lemos, J. Rockey (2021) The Wounds That Do Not Heal. The Life-time Scar of Youth Unemployment Available at <https://www.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/ecca.12384> /Accessed 4 November 2024/
4. Scarpetta, S., A. Sonnet, T. Manfredi (2010) Rising Youth Unemployment During the Crisis : How to Prevent Negative Long-term Consequences on a Generation Available at <https://www.oecd-library.org/docserver/5kmh79zb2mmv-en.pdf?expires=1731209166&id=id&accname=guest&checksum=437FC25DAE31ACEE0A7906BFE330D8FB> /Accessed 17 October 2024/
5. <https://www.ec.europa.eu/info/sites/info/files/communication-europe-moment-repair-prepare-next-generation.pdf> European Commission (2020a), Europe`s moment: Repair and Prepare for the Next Generation
6. <https://www.ec.europa.eu/commission/presscorner/detail/en/ip201193> European Commission (2020c), Commission launches Youth Employment Support: a bridge to jobs for the next generation
7. <https://www.nsi.bg/bg/content/4013/>
8. <https://www.ec.europa.eu/eurostat/web/labour-market/database>

THE OIL PRICE AND THE EXTERNAL BULGARIA'S TRADE IN THE CONTEXT OF FUNDAMENTAL ECONOMIC RESEARCH

Chief Assist. Prof. Lyubomir Lyubenow, PhD
University of Economics - Varna, Bulgaria

Abstract: The objective of this report is to assess the impact of oil price dynamics on Bulgaria's foreign trade using elasticity theory and one-factor linear regression. This involves the use of specific methods that require fundamental knowledge and research experience. Bulgaria's foreign trade was found to be inelastic in general with respect to oil prices. This was explained by the particularities of the period studied, the type of data and the method used. The study provides a good basis for a more in-depth study using the Almon model. Bulgaria's imports of energy resources and crude oil are mainly determined by the oil price. This makes it a significant factor for our economy and suggests that it is determined by factors external to the EU.

Keywords: Elasticity; Energy resources; Foreign trade; Oil; Regression.

JEL code: C32

ЦЕНАТА НА ПЕТРОЛА И ВЪНШНАТА ТЪРГОВИЯ НА БЪЛГАРИЯ В КОНТЕКСТА НА ФУНДАМЕНТАЛНИТЕ ИКОНОМИЧЕСКИ ИЗСЛЕДВАНИЯ

Гл. ас. д-р Любомир Любенов
Икономически университет - Варна, България

ВЪВЕДЕНИЕ

Цените на петрола, с тяхната изменчивост, са едни от най-значимите измерители на процесите в световната икономика. Тяхното изследване предполага използването на специфични методи, които изискват значителни запаси от знания и опит в научните изследвания. Висшето образование, в този смисъл, е задължено да ги предостави в своята фундаментална подготовка. Статистиката, като наука и практика, позволява, съвместно с математиката и икономикса, да осъществят този процес.

В настоящия доклад се прави опит да се изследва влиянието на цените на петрола върху външната търговия на Р. България и по този начин да се демонстрират възможностите на гореспоменатите науки.

Република България е ресурсно необезпечена страна, с отворена икономика, чиято външна търговия е фактор за развитието на националното и стопанство. В същото време, външната ни търговия е повлияна от икономически индикатори, които оказват директно влияние върху нейната динамика и стойностни обеми. Пример за това са макроикономически променливи като валутния курс на еврото спрямо долара и цените на петрола на световните пазари. Цените на суровия петрол са едни от най-значимите измерители на процесите в световните икономически системи. Изменчивостта в котировките им следват икономическите и политически събития. Поради особеностите на добива и търговията с петрол, винаги се проявява определено забавяне (времеви лаг) в проявленията на тези въздействия.

Външната ни търговия е подложена на множество разнопосочни въздействия, които са водещи за икономическата система в световен и в регионален мащаб. В

този смисъл интерес представлява до каква степен външната търговия на страната ни е детерминирана от влиянието на посочените макроикономически индикатори.

Цел на настоящия доклад е да оцени влиянието на динамиката на цените на петрола върху външната търговия на България. Това се осъществява с помощта на теорията на еластичността (Rose, 1991) и еднофакторна линейна регресия (Димитров, 1995).

Преглед на литературата

Под цена на петрола най-често се разбират спотовите цени за барел суров петрол на един от стандартните (маркерни, еталонни) сортове нефт, които се търгуват свободно на фючърните пазари. Това се прави с цел да се опрости търговията с петрол. По-значимите маркерни сортове са следните (определенията са според Federal reserve bank of St. Louis) :

West Texas Intermediate (WTI и *Light Sweet Crude Oil*) е тексастки нефт, търгуем на NYMEX;

Brent Crude Oil (наричан още *Brent Blend*, *London Brent*, търгува се на ICE) е нефтена смес от няколко находища в Северно море (Великобритания и Норвегия), който задава стандартът на цените за пазарите в Европа и страните от ОПЕК;

Dubai/Oman (*Oman Crude*, търгува се на *Dubai Mercantile Exchange*) е основен маркерен сорт за азиатските пазари.

Добивът от маркерните сортове Brent и WTI е сравнително нисък, например през 2011 г. той сумарно е около 2 % от световния добив (Dunn and Holloway, 2012). Същевременно техните цени се оказват водещи за световните пазари.

Цените на петрола оказват влияние върху географията на световната търговия, като най-засегната е търговията по по-дълги морски маршрути. Високите цени на петрола в бъдеще може наистина да прекъснат глобализацията, тъй като еластичността на търговията от разстояние е по-висока в годините на високи цени на петрола (Von Below, D and P-L Vézina, 2016). От друга страна, спадането на цените на петрола дава възможност на много страни да намалят енергийните субсидии и да използват спестяванията за по-целенасочени трансфери (Arezki, R and O Blanchard, 2015). За други страни това е шанс за увеличаване на енергийните данъци и намаляване на други данъци.

От 1986 г. насам се наблюдава системно нарастване на нестабилността на реалната цена на суровия петрол, последвано от спад в нестабилността на производството на петрол от началото на 90-те години. Едно вероятно обяснение на този емпиричен факт е, че както краткосрочната ценова еластичност на търсенето на петрол, така и на предлагането на петрол са намаляли значително от втората половина на 80-те години на миналия век. Това означава, че малките смущения от двете страни на петролния пазар могат да генерират големи ценови реакции без големи движения на количеството, което помага да се обясни последното нарастване и последващия срыв в цената на петрола. Предполага се, че променливостта на сътресенията в търсенето и предлагането на петрол всъщност е намаляла в по-близкото минало, предотвратявайки дори по-големи колебания на цените на петрола, отколкото се наблюдава в данните (Christiane Baumeister & Gert Peersman, 2013).

От всичко изложено дотук може да се направи логичния извод, че динамиката на цените на петрола оказва съществено въздействие върху световната икономика.

Това предопределя нуждата от все по-системно и задълбочено изследване на тези процеси с наличния научен инструментариум.

Методика и информационна база на изследването

С помощта на еднофакторни линейни регресионни модели се оценява еластичността на вноса и износа спрямо цената на петрола и се извършва сравнителен анализ на получените резултати. Анализира се детерминираността на външната ни търговия и се дискутират възможностите за нейното прогнозиране.

Използват се данни за вноса и износа по начин на използване по тримесечия за периода 2009:1–2021:3. Избраните за факторни макроикономически променливи са цена на суровия петрол сортове Brent и WTI.

Като зависими променливи за външната търговия в изследването се включват общия износ и внос, общия износ и внос на енергийни ресурси, износа на петролни продукти и вноса на суров петрол и природен газ. Данните за тях се деноминират от евро в щатски долари. Това се налага поради следните обстоятелства:

- 1) Цените на петрола са в щатски долари за барел;
- 2) Иконометричната теория изисква съпоставимост на изходните данни.

Източници на данните са статистическите публикации на НСИ, БНБ, Евростат и Федералния резерв на САЩ.

Тримесечните данни се предпочитат, понеже това води до някои желани ефекти. Според Хаджиев (2001) така се повишава надеждността на заключенията относно устойчивата тенденция. По този начин се ограничава и вариацията, предизвикана от динамиката на валутния курс.

Началото на периода на изследването се фиксира на 2009 г. поради следните причини:

- 1) България влезе в Европейския съюз през 2007 г., а стабилизацията на икономическите процеси, вкл. и на външната ни търговия, настъпи след период от около 2 години;
- 2) През 2007 г. започна и Световната икономическа криза, която даде своето отражение и върху външната търговия на България през следващите две години.

С цел детайлизиране на изследването и по-ясното оценяване на влиянието на фактора, моделирането се извършва, както за целия изследван период, така и за двата подпериода включени в него – до членството ни в ЕС и след това – съответно 1999:1–2006:4 и 2007:1–2021:3.

Иконометрични модели за оценка на еластичността

Иконометричното моделиране се извършва както за целия наблюдаван период, така и за периодите преди и след членството на България в ЕС. Целта е, както да се изследва влиянието на валутния курс за един по-продължителен период от време (23 години), така и да се оцени еластичността на външната търговия на България при различни условия на функциониране на външноикономическата пазарна среда.

В конкретното изследване като зависими променливи се избират общия внос и износ, общия внос и износ на енергийни ресурси, както и вноса на суров петрол и природен газ и износа на петролни продукти. Восът на енергийни ресурси, средно за периода, съставлява 21,2 % от общия внос, а износьт на енергийни ресурси е 13,0 % от общия износ на страната. Същевременно 77,7 % от общия износ на енергийни ресурси е износ на петролни продукти, а вносьт на суров петрол и природен газ е

76,0 % от общия внос на енергийни ресурси. Смятаме, че тези относителни дялове са определящи за включването на съответните променливи в това изследване.

Посочените динамични редове за външната търговия, както и избраните макроикономически променливи се изследват за интегрираност. Тестовите за интегрираност се прилагат върху сезонно ажустираните данни. Методът за сезонно ажустиране е Census X11.2. След отстраняване влиянието на сезонността данните се логаритмуват. Така получените динамични редове се подлагат на разширения тест за интегрираност на Дики-Фулър (Charemza, W. W. and D.F. Deadman, 1997). Критерии за избор на основното уравнение при ADF и PP тестовите са отсъствие на автокорелация в остатъците и оптимални стойности за AIC и SC критериите (Caporale, G. and M. Chui, 1999). Критичната стойност за всички динамични редове се фиксира при 1 % риск за грешка.

Всички изследвани динамични редове са интегрирани от първи порядък. Това позволява при моделирането на зависимостите да се използват техните първи последователни разлики. В този смисъл, получените регресионни коефициенти могат да се тълкуват като чисти коефициенти на еластичност.

Линейни еднофакторни модели

Чрез използването на еднофакторните регресионни модели се цели установяването на значими релации, които се проявяват в рамките на текущото тримесечие между изследваните променливи. Класическият модел позволява лесна и директна интерпретация на получените резултати и дава стабилна основа за развитие на изследването в посока идентификация на реално съществуващи зависимости между факторни и зависими променливи.

При моделирането бе въведена опция с изключване на константата от модела. Всички модели са от следния вид, предвид обстоятелството, че приложената трансформация на данните е намирането на първи последователни разлики (Любенов, 2013):

$$\left(\frac{Y_t}{Y_{t-1}} \right) = \left[e^{\omega_t \delta} \right] * \left(\frac{X_t}{X_{t-1}} \right)^{\beta}, \quad (1)$$

където:

Y_t, Y_{t-1} – стойности на зависимата променлива в моменти t и $t-1$;

X_t, X_{t-1} – стойности на факторната променлива в моменти t и $t-1$;

e, ω, δ – параметри на модела, представящи неговата константа;

β - регресионен коефициент на модела.

В този случай получените значими регресионни коефициенти могат да се тълкуват директно като коефициенти на еластичност.

За улеснение при разчитането на характеристиките на моделите в Таблица 1 се представя тяхната интерпретация.

Таблица 1

Интерпретация на характеристиките на еднофакторните модели

Характеристика	Интерпретация
Adj R-sqr	Ажустиран коефициент на детерминация на модела
DW stat	Стойност на теста за автокорелираност на остатъците на модела
AIC / SC	Информационни критерии на Акайке и Шварц
Const	Константа на модела (когато е без константа се отбелязва none)
BETA	Регресионен коефициент b1 / Коефициент на еластичност
SE	Стандартна грешка на коефициента b1

Източник: авторът

След използването на критериите на Akaike и Schwarz бяха избрани определени модели, представени в таблица 2.

РЕЗУЛТАТИ

От получените резултати могат да се отбележат следните по-важни аспекта.

За целия изследван период статистически значими са само модели за общия износ и внос. По-висока детерминация се наблюдава при моделите с константа. Двата фактора оказват идентично въздействие върху зависимите променливи.

За първия изследван подпериод, до влизането на България в ЕС, се получават само значими модели за общия и знос и износьт на енергийни ресурси. Всичките модели са без константа и с много ниска детерминация. Относително тя е по-висока при модел 10 (24,5 %).

За втория изследван подпериод се наблюдават предимно значими модели за вноса. За износа са представени само модели за общия износ. Тук детерминацията е значително по-висока, в сравнение с предходните модели. Общият внос се характеризира с детерминация от над 60 %. Най-висока е тя, обаче, при

моделите за внос на енергийни ресурси при фактор Brent – 62,5%. На второ място може да се поставят моделите за внос на суров петрол.

Таблица 2

Основни параметри на еднофакторните модели на еластичността на външната търговия

Модел №	Зависима променлива	Фактор	Характеристики на модела					
			Adj R-sqr	DW stat	AIC / SC	Const	BETA	SE
За целия изследван период 1999:1 - 2021:3								
1	Общ износ (X)	Brent	0,434	2,09	−247,5/−242,5	0,0203	0,331	0,039
2		WTI	0,442	2,07	−248,9/−243,9	0,0209	0,336	0,039
3	Общ износ (X)	Brent	0,376	1,89	−239,8/−237,3	none	0,346	0,041
4		WTI	0,381	1,87	−240,5/−237,9	none	0,349	0,042
5	Общ внос (M)	Brent	0,424	1,98	−243,6/−238,6	0,0177	0,332	0,041
6		WTI	0,458	1,96	−249,2/−244,2	0,0182	0,346	0,039
7	Общ внос (M)	Brent	0,384	1,84	−238,5/−235,9	none	0,345	0,042
8		WTI	0,415	1,81	−243,3/−240,8	none	0,359	0,041
За първи подпериод 1999:1 - 2006:4								
9	Общ износ (X)	Brent	0,160	1,93	−71,0/−69,6	none	0,271	0,113
10		WTI	0,245	1,94	−74,4/−72,9	none	0,357	0,114

11	Износ на енергийни ресурси (Хе)	Brent	0,116	2,45	3,5/4,9	none	0,749	0,377
12		WTI	0,149	2,49	2,3/ 3,7	none	0,902	0,393
За втори подпериод 2007:1 - 2021:3								
13	Общ износ (X)	Brent	0,588	1,97	-173,7/-169,5	0,0153	0,362	0,039
14		WTI	0,546	1,95	-167,9/-163,8	0,0156	0,348	0,041
15	Общ износ (X)	Brent	0,562	1,82	-171,1/-168,9	none	0,364	0,041
16		WTI	0,519	1,81	-165,6/-163,5	none	0,349	0,042
17	Общ внос (М)	Brent	0,604	1,88	-171,5/-167,3	0,0092	0,381	0,040
18		WTI	0,602	1,87	-171,2/-167,1	0,0095	0,379	0,040
19	Общ внос (М)	Brent	0,599	1,83	-171,8/-169,7	none	0,382	0,041
20		WTI	0,597	1,82	-171,5/-169,4	none	0,379	0,040
21	Внос на енергийни ресурси (Ме)	Brent	0,619	2,30	-82,6/-78,4	0,0039	0,836	0,086
22		WTI	0,578	2,31	-76,5/-72,4	0,0046	0,804	0,090
23	Внос на енергийни ресурси (Ме)	Brent	0,625	2,29	-84,5/-82,4	none	0,837	0,085
24		WTI	0,585	2,30	-78,4/-76,4	none	0,805	0,089
25	Внос на суров петрол (Мо)	Brent	0,597	2,25	-63,7/-59,5	0,0016	0,937	0,101
26		WTI	0,547	2,29	-56,8/-52,6	0,0024	0,893	0,106
27	Внос на суров петрол (Мо)	Brent	0,604	2,25	-65,7/-63,6	none	0,937	0,099
28		WTI	0,554	2,29	-58,7/-56,7	none	0,893	0,105

Източник: авторът

По отношение на еластичността на моделите може да се отбележи, че тя е ниска, няма нито един модел с коефициент над единица. За целия изследван период тя е с най-ниски стойности, между 0,331 и 0,359. През първия подпериод се наблюдават стойности от 0,271 до 0,902, като най-високата стойност е при модел 12. Вторият подпериод се характеризира със стойности между 0,348 и 0,937. Най-високите стойности са за моделите за внос на суров петрол.

В този смисъл можем да отбележим, че ценова еластичност към цените на петрола се проявява при вноса на енергийни ресурси, в частност – при вноса на суров петрол. Доколкото коефициентите са под единица, това може да се обясни с използването на тримесечните данни, оттам и краткия хоризонт за отчитане на влиянието на факторите. Допълнително ограничение е и използването само на линейната форма на модела. Това предоставя възможност за по-нататъшни изследвания чрез използването на други модели, позволяващи отчитането на по-голям лаг в моделите. Моделът на Алмон е естественото развитие за бъдещи изследвания, при него се позволява и експериментирането с полиномиални лагове.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На базата на получените резултати се обособяват следните изводи:

1. За наблюдавания период пряко може да се оцени еластичността на външната търговия с енергийни ресурси за всички зависими променливи;
2. Външната търговия е нееластична като цяло по отношение на цените на петрола. Това може да се обясни с две причини. Първо, особеностите на изследвания период и подпериоди (до и след влизането на България в ЕС). Второ, особеностите на типа данни (тримесечни) и използвания метод (еднофакторни линейни модели);

3. Използването на еднофакторните модели за оценка на еластичността на външната търговия дава надеждни резултати и е добра основа за по-задълбоченото и изследване чрез модела на Алмон.

4. След влизането на България в ЕС влиянието на цената на петрола детерминира предимно вносът ни, и по специално – вносът на енергийни ресурси и суров петрол. Тя се оказва съществен фактор за външната ни търговия. Наличието на този ефект предполага хипотезата, че икономиката на страната ни се детерминира от външни за ЕС фактори.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Caporale, G. and M. Chui (1999) Estimating Income and Price Elasticities of Trade in a Cointegration Framework. *Review of International Economics*. Vol. 7 Issue 2. pp. 254-265.

2. Charemza, W. W. and D.F. Deadman. (1997) *New directions in econometric practice*. Edward Elgar, Cheltenham.

3. Christiane Baumeister & Gert Peersman, 2013. The Role Of Time- Varying Price Elasticities In Accounting For Volatility Changes In The Crude Oil Market," *Journal of Applied Econometrics*. John Wiley & Sons, Ltd., vol. 28(7), pages 1087-1109, November.

4. Dimitrov, A. (1995) *Vavedenie v ikonometriyata*. Abagar.

5. Hadzhiev, V. (2001) *Elastichnost na vanshnata targovia*. Slavena.

6. Arezki, R. and O. Blanchard (2015) The 2014 oil price slump: Seven key questions. *VoxEU.org*, 13 January.

7. Lyubenov, L. (2013) Otsenka na elastichnostta na vanshnata targovia s energiyi resursi na Republika Bulgaria. *Izvestia*. s. 63-72.

8. Rose, Andrew K., (1991) The role of exchange rates in a popular model of international trade: Does the 'Marshall-Lerner' condition hold? *Journal of International Economics* 30 (3-4). pp. 301-316.

9. Stephanie Dunn & James Holloway (2012). The Pricing Of Crude Oil. *RBA Bulletin (Print copy discontinued)*, Reserve Bank of Australia, pp. 65-74, September.

10. Von Below, D and P-L Vézina (2016) The trade consequences of pricey oil. *IMF Economic Review*. pp. 303-318.

BIG DATA IN STATISTICS TEACHING

Chief Assist. Prof. Svetlana Todorova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Chief Assist. Prof. Vesela Dimitrova, PhD
University of National and World Economy – Sofia, Bulgaria

Abstract: *Today businesses and organizations generate and gather data at an increasing pace. The term big data is a catch-phrase, meaning a massive amount of structured, semi-structured and unstructured data. Despite the fact that big data is used in advanced analytics to solve all sorts of problems and make informed decisions, they are extremely difficult to manage, process, and analyze using traditional data-processing tools. This research aims to present the opportunities and challenges of big data. For instance, the huge sample sizes may detect differences that are quite small and trivial. This problem is associated with the relationships among sample size, p-value, and effect size. To report an effect size is a critical step for scientific studies and may show significant differences according to research types. Despite the challenges, big data presents a great opportunity to gain knowledge of all fields of our life.*

Keywords: *Big Data; Statistical Significance; Effect Size*

JEL code: *C12, C55*

BIG DATA В ОБУЧЕНИЕТО ПО СТАТИСТИКА

Гл. ас. д-р Светлана Тодорова
Икономически университет - Варна, България

Гл. ас. д-р Весела Димитрова
Университет за национално и световно стопанство - София, България

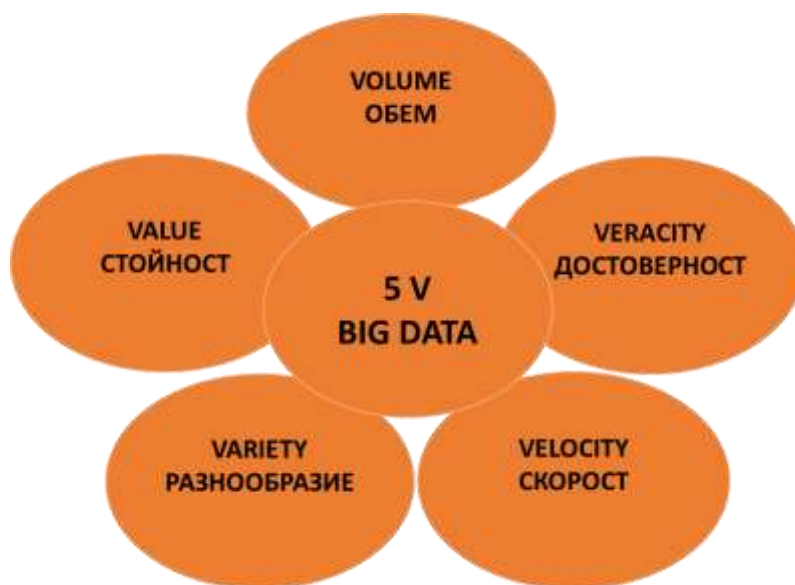
Въведение

През последното десетилетие наблюдаваме експоненциално нарастване на данните генерирани в различни области, както от информационните технологии, бизнеса, здравеопазването и много други, така и в сферата на образованието. Събирането на данни без конкретна цел, дори от големи масиви, влияе пряко върху качеството на данните. Това неминуемо създава проблеми при анализа и интерпретацията на получените резултати.

1. Същност на големите данни

Големите данни (Big data) са масиви от данни, при които обема, скоростта или типа на данните са толкова големи, че е трудно да се съхраняват, използват, обработват и анализират с помощта на традиционни инструменти и софтуерни продукти за обработка и анализ на данни. Масивите от големите данни е трудно да се съхраняват на един компютър, скоростта на промяна на данните е много висока и е трудно да се обработват в реално време. От друга страна, в масивите от големи данни има включени различни по тип данни, събират се от различни по вид източници и понякога липсват част от данните. Всичко това прави трудно съхранението, обработката и анализа на Big data.

Характеристиките на данните от тип Big data на фиг. 1 правят големите данни различни от традиционните данните.



Фиг. 1. Характеристики на Big Data

Източник: Hariri et al. (2019, pp.4)

Първоначално характеристиките на Big Data се дефинира до 3V (Volume, Velocity, Variety), като в последствие се допълват от още две характеристики (Value, Variety) виж. фиг.1. През последните години се добавиха и още две характеристики на Big Data: визуализация (Visualization) и валидация (Validity).

Обемът на Big Data е количеството генерирани, съхранявани и обработвани данни, като обработката на това огромно количество данни е предизвикателство за традиционните методи използвани за обработка на данни, включително и традиционните статистически методи. Big Data се характеризират с висока скорост (Velocity) на промяна на данните. Това означава, че данните трябва да се обработват и анализират в реално време, за да бъдат полезни. Това изискване може да бъде спазено, ако се използва специализиран инструментариум. В обучението е трудно да се използват големи данни в реално време (streaming data), с традиционните инструменти, но може да се използват част от данните – извадка. По този начин могат да се представят на обучаващите някои специфични техники и методи за обработка и анализ на данните. Разнообразието (Variety) при Big Data е свързано с типа на данните и тяхното организиране. Най-общо данните могат да са структурирани, полуструктурирани и неструктурирани данни. Структурираните данни са данни, които предварително са структурирани в определен формат, като например електронни таблици и бази данни подредени по определени признаци и връзки. Частично организираните данни, като например данните в XML файлове са полуструктурирани данни. Когато данните са от графични, аудио, видео изображения и текст, те са неструктурирани данни.

Достоверността (Veracity) на Big Data е характеристика, свързана с истинността и качеството на данните. Колкото по-точни и пълни са данните, толкова по-точни и пълна ще е обработката и анализа на данните. През последните години източниците на данни стават все по-разнообразни, но гарантирането на качеството

на данните в различните източници не винаги е достоверно. Извличането на стойности (Value) е ценна информация, която предоставят големите данни. Тази информация, като част от огромния обем от данни, която може да се извлече от специализирани инструменти е важен продукт и може да служи за вземане на решения в много и различни области, като бизнеса, медицината, образованието и т.н.

Останалите две характеристики визуализация (Visualization) и валидация (Validity) на Big Data, не са по-маловажни от останалите. Валидността (Validity) на Big Data се свързва с това, дали данните са представителни за целта, за която се използват и анализират. Непредставителните и неподходящите данни могат да доведат до неправилни обобщения и неправилно взети решения.

Визуализацията (Visualization) или представянето на данните и резултатите от анализа на Big Data е от изключителна важност. Инструментите за визуализация са лесен и разбираем начин на представяне на данните, резултатите от анализите и са от решаващо значение за правилно взетите решения от ползвателите на Big Data.

2. Използване на Big Data, в зависимост от типа им

Тъй като количеството на данните в заобикалящия ни свят продължава да расте, необходимостта от тяхното използване става все по-важна. Различните типове данни изискват различни инструменти и техники за извличане, обработка и анализ. Основните категории на данните са: (Cielen,2016, pp.4):

- Неструктурирани
- Структурирани
- Базирани на графи или мрежови данни
- Аудио и видео изображения
- Машинно генерирани данни
- streaming данни и т.н.

По-голяма част от всички данни са в неструктурирана форма. Неструктурираните данни са тези, при които нямаме предварително организиран начин на подреждане на данните. Те не могат да бъдат обработени чрез използването на обичайни методи. Има различни техники за извличане на данни, които в последствие да могат да се превърнат от неструктурирани в структурирани данни. С навлизането на машинното обучение (machine learning) може неструктурираните данни да се превърнат в структурирани.

Структурираните данни могат да бъдат подредени база данни (напр. SQL релационни бази данни) или данни съхранявани в таблици (напр. Excel). В статистиката могат да се ползват само структурирани данни и ако не са структурирани е необходим допълнителен ресурс, за да се структурират.

Графите са абстрактна структури от данни, които служат за моделиране на връзки между двойки обекти. Графите или мрежови данни се използват за връзката или съседството на обекти. Използват се много често за представяне на структури в социалните мрежи. Машините данни са автоматично генерирани от машина (напр. компютър) или приложение данни. Streaming data са такива данни, които не се съхраняват в база от данни, а са данни за случващо се събитие на живо.

Увеличаващата се роля при анализа на данни на програмните езици като Python, R и др. стана с навлизането на новите технологии при Big Data. Python е изключително популярен при извличането, обработката и анализа на данни. Този

програмен език е изключително лесен, гъвкав, с ясен синтаксис и предлага множество библиотеки като NumPy, Pandas, SciPy, Matplotlib и Seaborn, които улесняват анализа на данни. Python е един от предпочитаните програмни езици при и при машинното обучение (machine learning), като за целта има и специална библиотека – Scikit-learn, TensorFlow, PyTorch. В тези библиотеки в Python има имплементиран голям набор от алгоритми за машинното обучение.

Съществуват и технологии, които правят възможно съхранението и обработката на Big Data за кратък период от време. Такива са Hadoop, Spark, Storm и други. Тези технологии са със свободен код, като например Spark е създадена като по-модерно решение в сравнение с Hadoop, има бърза производителност и позволява обработка на масивни потоци от данни, като поддържа четири програмни езици – Python, R, Java и Scala.

Когато става дума за обучение с данни, от изключителна важност е да се покажат начините, по които да се извличат данни, да се структурират, почистват, да се използват статистически и иконометрични методи за представяне и анализиране на данните, били и такива като Big Data.

3. Статистическите анализи с Big Data могат да идентифицират значителни, но несъществени ефекти

Въпреки че статистическите изследванията базирани на структурирани Big Data имат много предимства, слабо значимите ефекти, наблюдавани при такива проучвания, обикновено показват, че размерът на ефектът, представен чрез обобщаващия показател Cohen's d (Cohen, J., 1992) е доста скромен и практически маловажен. Размерът на ефекта е мярка за това колко важна е разликата, като големите размери на ефекта означават, че разликата е важна, малките размери на ефекта означава, че разликата е маловажна (Todorova, 2022). Размерът на ефекта се получава като се нормира разликата между двете средни и дава мярка за това колко съществено се различават сравняваните групи по даден признак. При постоянно равнище на значимост $\alpha = 0.05$ е по-вероятно да се намери статистически значима разлика при големи по обем извадки в сравнение с малки по обем извадки. Например, ефектите от лечението с дадено лекарство или повишаване на ефективността на нов иновативен метод на преподаване, идентифицирани на основата на големи извадки от структурирани Big Data, въпреки че са статистически значими, може да са почти тривиални на индивидуално ниво, тъй като тестването на статистическата значимост е предназначено за използване при малки, а не при големи по обем извадки.

За представяне на гореизложеното се генерират случайни извадки чрез Random Number Generator от Analysis Tool Pack на MS Excel при следните спецификации: извадка 1 с нормално разпределение, средна = 20, стандартно отклонение = 5 и обем на извадката = 10000; извадка 2 с нормално разпределение, средна = 20,5, стандартно отклонение = 5, обем на извадката = 10000. Теоретичната разлика между средните е твърде малка и незначима (0,5). Прави се статистическа проверка на хипотезата за разлика между средни на две независими извадки, като се приема предположението, че стандартните отклонения са еднакви, тъй като теоретично е заложено, че стандартното отклонение е 5 и при двете извадки. Експериментът е проведен при следните случаи - с първите 30, първите 100, първите 500, първите 1000, първите 5000 и всички 10000 наблюдения. Обработката на данни

е реализирана с онлайн свободно разпространен специализиран софтуер - Effect Size Calculator (Statistics Kingdom, 2017: <https://www.statskingdom.com/effect-size-calculator.html>). Резултатите от анализа са поместени в таблица 1 и таблица 2.

Таблица 1

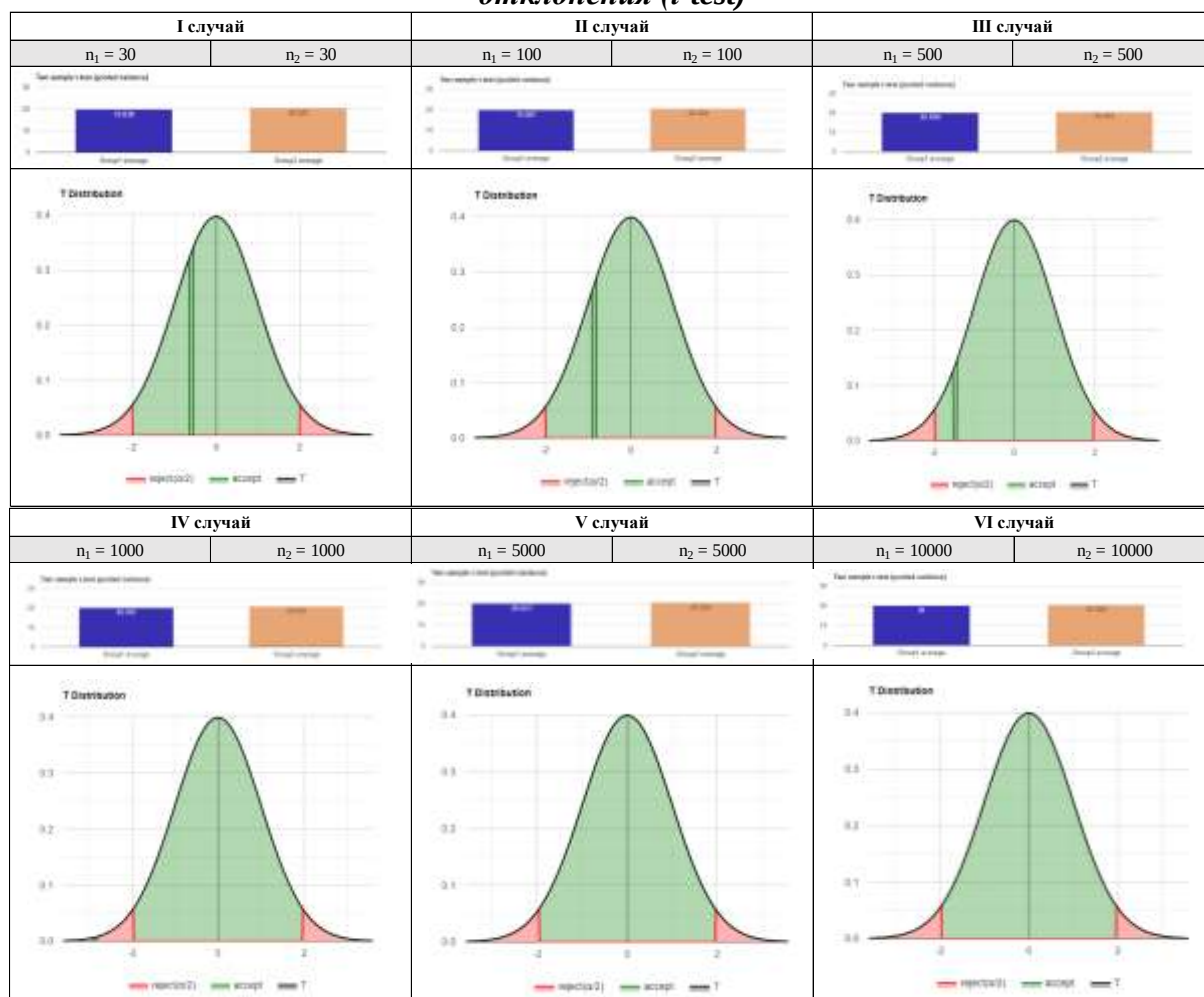
Обобщаващи характеристики и оценки на параметрите на генералните съвкупности при тестване на хипотези за разликата между средни на две независими извадки при предположение за еднакви стандартни отклонения (t-test)

Обобщаващи характеристики и оценки	I случай		II случай		III случай		IV случай		V случай		VI случай	
	$n_1 = 30$	$n_2 = 30$	$n_1 = 100$	$n_2 = 100$	$n_1 = 500$	$n_2 = 500$	$n_1 = 1000$	$n_2 = 1000$	$n_1 = 5000$	$n_2 = 5000$	$n_1 = 10000$	$n_2 = 10000$
Средна аритметична	19,8383	20,5225	19,8669	20,4582	20,0945	20,5614	20,0008	20,6415	20,0206	20,5552	20,0005	20,5661
Разлика между средните	-0,6843		-0,5913		-0,4669		-0,6407		-0,5346		-0,5656	
Стандартно отклонение	4,8823	4,0831	5,0690	4,8290	5,0436	5,0175	5,0635	4,9645	4,9591	5,0082	4,9636	5,0659
Стандартно отклонение (pooled)	4,5005		4,9507		5,0306		5,0142		4,9837		5,0150	
t-емперична характеристика	-0,5889		-0,8446		-1,4675		-2,8574		-5,3639		-7,9748	
p-стойност	0,5582		0,3994		0,1425		0,0043		0,0000001		0,000000000000002	
Размер на ефект	0,15		0,12		0,09		0,13		0,11		0,11	

Източник: По изчисления на автора, реализирани със Statistics Kingdom, <https://www.statskingdom.com/effect-size-calculator.html>

Таблица 2

Графично представяне на резултатите при тестване на хипотези за разликата между средни на две независими извадки при предположение за еднакви стандартни отклонения (t-test)



Източник: По изчисления на автора, реализирани със Statistics Kingdom, <https://www.statskingdom.com/effect-size-calculator.html>

От получените резултати следва, че при малък обем на извадките (30, 100 и

500) разликите в средните са статистически незначими. С увеличаване на обема на извадките (1000, 5000 и 10000) p -стойностите намаляват и всички разлики са статистически значими. Това е продиктувано и от самото конструиране на формулата за изчисляване на емпиричните характеристики на статистическия критерий, защото с увеличаване на обемите на извадките се увеличава и абсолютната стойност на емпиричната характеристика. Това води до намаляване на p -стойността и съответно увеличаване на статистическата значимост. При всички тествани случаи, размерът на ефекта е малък и е в границите от 0,09 до 0,15. В конкретния пример, при извадките с най-малък обем = 30 се наблюдава най-голяма абсолютната разлика между средните и най-голям размер на ефекта, но поради малкия обем на извадките p -стойността е най-висока и това прави разликата в средните статистически незначима. Докато, при извадките с обеми = 10000 абсолютната разлика между средните е по-малка, размерът на ефекта също е с по-ниска стойност, но поради големите обеми на извадките p -стойността е много малка, клоняща към 0 и съответно разликата е статистически значима. Това показва, че ако се изискват качествени резултати, то непременно заедно със статистическата значимост трябва да се обявява и размера на ефекта, който показва какво е практическото значение на статистически значимите резултати.

Често приемаме, че по-голямото е по-добро, че големият обем на извадката води до по-добри резултати, но по-голямото не означава непременно по-качествени резултати. При използването на Big Data е много по-вероятно ако е налице нищожна разлика, то тя да бъде статистически значима, макар и маловажна. Затова при статистическата проверка на хипотези е изключително важно наред със статистическата значимост да се изследва и докладва размера на ефекта.

От друга страна, често проучванията могат да включат систематични грешки, произтичащи от проблеми с дизайна на изследването. Увеличаването на обема на извадката при тези проучвания не би преодоляло този проблем и всъщност изследвания с големи извадки могат само да увеличат систематичните грешки и в следствие да опорочат направените заключения от тестването на статистически хипотези. Затова приложението на Big Data, въпреки големите си възможности, не винаги подобрява валидността на проучвания (Kaplan, 2014).

Рутинно събираните данни, съставляващи Big Data влияе пряко върху качеството им. Когато данните не се събират за конкретна цел, те могат да не са с очакваното качество или да има липсващи данни (Сох, 2018). А това неминуемо създавала проблеми при статистическия им анализ и интерпретацията на получените резултати.

Съществуват доказателства, че когато изследванията се базират на много големи извадки (Big Data), стандартните грешки могат да намалееят обратно пропорционално на мощността на критерия (Сох, 2016). По този начин, докато в някои случаи Big Data могат да намалят важността на прецизната оценка, а в други може да са необходими допълнителни процедури, за да се прецизират получените резултати.

Заключение

Очевидно анализът на Big Data ще бъде важна част от нашето бъдеще, особено ако се комбинира с различни източници на данни. Въпреки че вече съществуват технологии, които правят възможно съхранението и обработката на Big

Data, то това е само за кратък период от време. Предизвикателство е и работата с Big Data и тяхното използване, обработка и анализ за целите на статистика. За реализиране на традиционните статистически анализи е необходимо да се използват само структурирани Big Data, което от една страна усложнява и оскъпява задачата, защото е необходимо да се използват допълнителни ресурси, а от друга - анализите се усложняват. Емпирично беше доказано, че при използването на големи извадки вероятността да се получат статистически значими разлики е много по-голяма, въпреки че е налице нищожно малка разлика. Затова, например при статистическата проверка на хипотези, е изключително важно наред със статистическата значимост да се изследва и докладва размера на ефекта. Това води до заключението, че с целенасочено внимание към съществуващите трудности, описани по-горе и с подходящи анализи е възможно да се справим с потенциалните проблеми.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Cielen, D., Meysman, A., Ali, M. (2016). *Introducing Data Science*. Manning Publication
2. Cohen, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin*, pp. 112, pp. 155–159
3. Cox, D.R., Kartsonaki C., Keogh R. H. (2018). Big data: Some statistical issues. *Stat Probab Lett*. 2018 May;136:111-115. doi: 10.1016/j.spl.2018.02.015. PMID: 29899584; PMCID: PMC5992743.
4. Cox D. R. (2016). Big data and precision. *Biometrika*. 102:712–716. [Google Scholar]
5. Effect Size Calculator [Internet]. Statistics Kingdom (2017). [cited 25 October 2024]. Available: <https://www.statskingdom.com/effect-size-calculator.html>
6. Hariri et al. (2019) Big Data, *Journal of Big Data*. Article number: 44, pp. 1-16. Available: <https://journalofbigdata.springeropen.com/articles/10.1186/s40537-019-0206-3>
7. Kaplan R. M., Chambers D. A., Glasgow R. E. (2014). Big data and large sample size: a cautionary note on the potential for bias. *Clin Transl Sci*. 2014 Aug;7(4):342-6. doi: 10.1111/cts.12178. Epub 2014 Jul 15. PMID: 25043853; PMCID: PMC5439816
8. Todorova, S. (2022). Statistical Significance, Power of the Test, and Effect Size Measures in Two-independent-samples t-test case. *Izvestia Journal of the Union of Scientists - Varna. Economic Sciences Series*, 11(1), pp.185-192

APPLYING DYNAMIC TIME WARPING TO ANALYZE SHAPE SIMILARITIES IN TIME SERIES DATA

Chief Assist. Prof. Slaveya Zhelyazkova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: The paper explores the potential of dynamic time warping (DTW) to detect shape-based similarities in time series data and assesses its effectiveness for cluster analysis using the "dtwclust" package in R. Theoretical considerations are demonstrated with an empirical analysis of real house price indices for 46 countries, utilizing OECD data spanning 2010–2023. Results indicate that employing DTW significantly influences clustering outcomes, as it enables the detection of shape similarities in time series, even in cases of temporal shifts and asynchronous patterns. This may lead to the identification of fewer clusters compared to standard clustering approaches. Furthermore, the choice of distance measure—Euclidean versus Manhattan—affects the clustering structure, with validity indices suggesting that DTW using Manhattan distance achieves better-defined, more distinct clusters. Comparative analysis with conventional hierarchical clustering highlights consistencies when similar distance metrics are applied.

Keywords: Dynamic time warping; Cluster analysis; dtwclust; Real house price indices

JEL code: C38, C63, R31

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ДИНАМИЧНОТО ВРЕМЕВО ИЗКРИВЯВАНЕ ЗА АНАЛИЗ НА СХОДСТВОТО ВЪВ ФОРМАТА НА ВРЕМЕВИ РЕДОВЕ

Гл. ас. д-р Славей Желязкова
Икономически университет - Варна, България

Въведение

Подходът на динамичното времево изкривяване (DTW – Dynamic time warping) се разработва и става популярен във връзка с приложението му при автоматичното разпознаване на речта. Датира от осемдесетте години на миналия век и като основополагащи се считат статиите на Itakura (1975) и Sakoe & Chiba (1978). Berndt & Clifford (1994) са изследователите, които дават нова насока за приложението на този подход при търсене на сходство във формата на времеви редове. DTW се прилага както самостоятелно, така и се интегрира с други методи като клъстерния анализ, корелационния анализ, методите за разкриване на аномалии и др. През последните години интересът към DTW не стихва и много изследователи се занимават с неговото усъвършенстване (Anantasech & Ratanamahatana, 2019, Choi et al., 2020, Tan et al., 2021, Mizutani & Dreyfus, 2021, Herrmann & Webb, 2023, Matsuo et al., 2023, Qiu et al., 2024), както и с възможностите за приложението му при клъстерния анализ на основата на времеви редове (Wang et al., 2018, Zhang et al., 2022).

Настоящият доклад има за цел да се проучат възможностите на DTW и приложимостта му при клъстерния анализ с използване на подходящ софтуер. Разгледаните теоретични постановки се илюстрират с изследване на сходството на динамиката на индексите на реалните цени на жилищата за 46 държави по данни на OECD за периода 2010 г. – 2023 г.

Динамичното времево изкривяване и приложението му при клъстерния анализ

DTW използва подхода на динамичното програмиране за намиране на такова съответствие на членовете на два времеви реда, при което се минимизира разстоянието между тях, на основата на избран измерител (Berndt & Clifford, 1994). При това съответствие е възможно един член на реда да се свърже с един или повече членове на другия времеви ред. Методът позволява сравнения на динамиката на времеви редове с различна дължина, т.е. различен брой членове. Нека тези редове са X и Y със следните членове: $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_m$, които предварително са стандартизирани. За всяка двойка членове на двата реда (x_i, y_j) се оценява различието $\delta(i, j)$ чрез квадрата на разликата между тях $(x_i - y_j)^2$, абсолютната стойност на разликата $|x_i - y_j|$ или друг измерител. Изчислените измерители на различието между членовете на двата реда формират матрица с размер $n \times m$. Задачата, която трябва да се реши чрез динамичното програмиране е да се намери такава пътека в матрицата, т.е. такова съответствие между членовете на двата времеви реда, което да минимизира кумулативните различия между тях. Дефинира се следната рекурсивна връзка между кумулативните различия (Berndt & Clifford, 1994):

$$\gamma(i, j) = \delta(i, j) + \min[\gamma(i-1, j), \gamma(i-1, j-1), \gamma(i, j-1)],$$

според която кумулативното различие за членовете с номера i и j се получава като към по-малката от стойностите на кумулативното различие за съседните членове, предшествващи разглеждания, се добави различието $\delta(i, j)$ за членовете с номера i и j . Така се определят членовете на матрицата, съдържаща кумулативните различия. Пътеката на времевото изкривяване (warping path) задава съответствието на членовете на двата реда и се определя като от горния десен ъгъл на матрицата надолу се избира всеки път този член от трите съседни, който има най-ниска стойност, представляваща кумулативното различие. Тук алгоритъмът е симетричен и е на базата на три члена на матрицата, защото това е заложено при изчисляването на кумулативните различия. Възможно е прилагането на асиметрични алгоритми, както и участието на повече членове (Sakoe & Chiba, 1978).

При търсенето на решение чрез подхода на динамичното програмиране се налагат следните ограничения към точките $w_k(i, j)$ от пътеката на времевото изкривяване (warping path) (Berndt & Clifford, 1994, Ratanamahatana & Keogh, 2004):

- гранични условия – пътеката трябва да започва от точка $w_1(1, 1)$ и да завършва в точка $w_K(n, m)$, т.е. залага се съответствие на първите и последните членове на двата времеви реда. От гледна точка на матрицата на кумулативните различия, пътеката трябва да започва от долният ляв ъгъл и да завършва в горния десен ъгъл.
- условия за непрекъснатост – координатите i или j на последователните точки от пътеката остават непроменени или нарастват с не-повече от единица ($i_k - i_{k-1} \leq 1$ и $j_k - j_{k-1} \leq 1$). Това гарантира, че е намерено съответствие между всички членове на двата разглеждани реда.
- условие за монотонност – точките трябва да бъдат монотонно подредени по отношение на времето, като $i_{k-1} \leq i_k$ и $j_{k-1} \leq j_k$. Следователно пътеката на времевото изкривяване върви само напред, без връщане назад във времето.

- условие за ограничаване на наклона – пътеката не трябва да бъде нито много стръмна, нито много полегата, т.е. не трябва да има много последователни нараствания само на едната от координатите на точките от пътеката. В противен случай ще има дълги последователности от членове на единия времеви ред, свързани с един член или малък брой последователни членове на другия ред.
- условие за ширината на прозореца на времеовото изкривяване – пътеката би следвало да не се отклонява значително от главния диагонал на матрицата на кумулативните различия. Точките от пътеката трябва да попадат в прозореца на времеовото изкривяване, който има зададена ширина r ($|i_k - j_k| \leq r$). Той задава допустимата отдалеченост във времето на свързваните членове на двата времеви реда.

При изследване на сходството във формата на множество времеви редове е подходящо тяхното класифициране чрез клъстерния анализ. Ако се прилага класическият вариант, би следвало да се сравняват съответните членове на времевите редове, което не би било подходящо при наличие на асинхронност в динамиката им. В този случай е подходящо определянето на съответствието на членовете на всяка двойка разглеждани времеви редове чрез DTW и използването му при намиране на разстоянията. При клъстерния анализ основно се използват следните: манхатаново разстояние, евклидовото разстояние, квадрата на евклидовото разстояние, разстояние на Чебишев, разстояние на Минковски и др. Клъстерният анализ може да се реализира като йерархичен, като метод на k-средните, като размито клъстеризиране и др. В изследването ще бъде приложен йерархичният клъстерен анализ, защото при него не е необходимо предварително определяне на броя на клъстерите и дава възможност да се проследи формирането на клъстерите на всяко следващо ниво, както и да се разкрие йерархичната структура на данните. Той може да се приложи като агломеративен или като дивизионен. При първия, всяка единица се разглежда като отделен клъстер и на всеки следващ етап, клъстерите, които са най-близки се обединяват в нов клъстер до достигане на един общ клъстер. При втория – в началото всички единици са обединени в един клъстер, който на всеки следващ етап се разделя на по-малки и по-хомогенни клъстери. В практиката по-широко приложение има агломеративния подход като тук има възможност за избор на начин за определяне на разстоянието между клъстерите и свързването им. Най-често използвани са следните начини на свързване на клъстерите (Everitt et al. 2011):

- **единично свързване**, при което разстоянието между два клъстера се определя като минималното разстояние между две единици от съответните клъстери;
- **пълно свързване**, при което разстоянието между два клъстера се определя като максималното разстояние между две единици от съответните клъстери;
- **средно групово свързване**, при което разстоянието между два клъстера се изчислява като непретеглена средна от разстоянието между всички двойки единици от съответните клъстери;
- **претеглено средно свързване**, при което разстоянието между два клъстера се изчислява като претеглена средна от разстоянието между всички двойки единици от съответните клъстери с тегла броя на единиците в съответните клъстери;

- **метод на центроида**, при който след обединяване на клъстери се определя центроид чрез осредняване или по друг начин и след това той участва при намиране на разстоянието между клъстерите, заедно с центроидите на други клъстери или индивидуални единици;
- **медианно свързване**, при което отново се работи с центроиди, но всеки нов центроид се определя на основата на центроидите на клъстерите, а не на индивидуалните единици в клъстерите, като по този начин не се дава възможност големите клъстери да доминират над малките при определянето на центроида. След това разстоянието между клъстерите се определя на основата на тези центроиди;
- **метод на Ward**, при който обединяването на два клъстера се основава на вътрешно клъстерната девиация, наричана още сума от квадратите на грешките. Тя се определя за всеки клъстер като сумата от квадратите на отклоненията от средните. Тези средни се получават от членовете на времевите редове от клъстера с един и същи пореден номер, а при приложението на метода DTW за съответстващите членове на разглежданите редове. След това за обединение с клъстера се избира този, който води до минимално увеличаване на сумата на квадратите на грешките след включване на новите единици в клъстера. Доказано е, че изменението на тази вътрешно клъстерна девиация е пропорционално на квадрата на евклидовото разстояние между центроидите на клъстерите. Затова в модифицираната версия на този метод се работи директно с квадрата на евклидовото разстояние като измерител на разстоянието между клъстерите. Счита се, че методът е най-слабо чувствителен към наличието на аутлайери. Предвид последното предимство, в изследването ще бъде предпочетен методът на Ward с приложената модификация.

За определяне на броя на клъстерите се използват графичният подход на основата на дендограмата, както и индексите за оценка на валидността на клъстерите (CVI). Arbelaiz et al. (2013) правят сравнителен анализ на множество CVI. Те посочват, че „повечето индекси оценяват кохезията на клъстерите (вътрешна или вътрешноклъстерна вариация) и тяхната сепарация (междуклъстерна или външна вариация) и ги комбинират, за да изчислят мярка за качество. Комбинирането се извършва чрез деление (индекси от тип съотношение) или чрез събиране (индекси от тип сума)”. Индексът на Dunn е от тип съотношение. В числителя стои разстоянието до най-близкия съсед, а в знаменателя – максималното разстояние между елементи на един и същи клъстер, което се нарича диаметър на клъстера (Arbelaiz et al., 2013):

$$D(C) = \frac{\min_{c_k \in C} \left\{ \min_{c_l \in C \setminus c_k} \{ \delta(c_k, c_l) \} \right\}}{\max_{c_k \in C} \{ \Delta(c_k) \}},$$

където:

$$\delta(c_k, c_l) = \min_{X_i \in C_k} \min_{X_j \in C_l} \{ d_e(X_i, X_j) \},$$

$$\Delta(c_k) = \max_{X_i, X_j \in C_k} \{ d_e(X_i, X_j) \}.$$

Силуетният индекс е нормиран индекс от тип сума. Изчислява се като средна на разликите между средното разстояние на всеки елемент на клъстера до елементите на най-близкия клъстер и средното разстояние до другите елементи на

собствения му клъстер, нормирани с по-голямата от двете стойности (Arbelaitz et al., 2013):

$$Sil(C) = 1/N \sum_{c_k \in C} \sum_{x_i \in c_k} \frac{b(x_i, c_k) - a(x_i, c_k)}{\max\{a(x_i, c_k), b(x_i, c_k)\}},$$

където:

$$a(x_i, c_k) = 1/|c_k| \sum_{x_j \in c_k} d_e(x_i, x_j),$$

$$b(x_i, c_k) = \min_{c_l \in C \setminus c_k} \left\{ 1/|c_l| \sum_{x_j \in c_l} d_e(x_i, x_j) \right\}.$$

Както Arbelaitz et. al. (2013) посочват индексът на Davies-Bouldin „оценява кохезията въз основа на разстоянието на елементите на клъстера до неговия центроид и сепарацията въз основа на разстоянието между центроидите“. Изчислява се като за всяка двойка клъстери се определя съотношението на сумата средните разстояния на елементите на всеки от клъстерите до съответния им центроид и разстоянието между тези двата центроида. След това се намира за всеки клъстер максималната стойност на съотношенията с негово участие и тези максимални стойности се осредняват (Arbelaitz et al., 2013):

$$DB(C) = 1/K \sum_{c_k \in C} \max_{c_l \in C \setminus c_k} \left\{ \frac{S(c_k) + S(c_l)}{d_e(\bar{c}_k, \bar{c}_l)} \right\},$$

където:

$$S(c_k) = 1/|c_k| \sum_{x_i \in c_k} d_e(x_i, \bar{c}_k).$$

При модифицирания вариант на индекса на Davies-Bouldin първо за всяка двойка клъстери се определя общата сума от средните разстояния на елементите на всеки от клъстерите до съответния им центроид. След това за всеки клъстер се намира максималната стойност на тези суми с негово участие. Тази максимална стойност се разделя на минималното разстояние между центроида на този клъстер и центроидите на останалите клъстери. Получените съотношения се осредняват (Arbelaitz et al., 2013):

$$DB^*(C) = 1/K \sum_{c_k \in C} \frac{\max_{c_l \in C \setminus c_k} \{S(c_k) + S(c_l)\}}{\min_{c_l \in C \setminus c_k} \{d_e(\bar{c}_k, \bar{c}_l)\}}.$$

По-високите стойности на силуетния индекс и индекса на Dunn и по-ниските стойности на индексите Davies-Bouldin показват по-добре отделени клъстери.

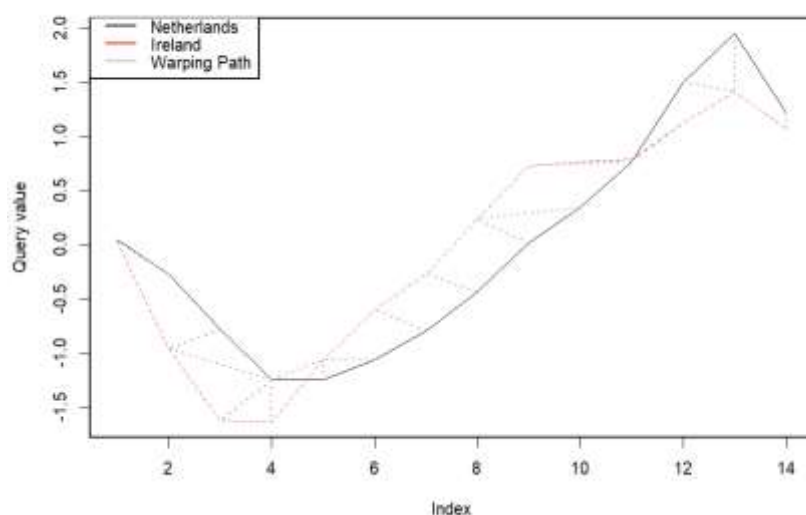
Анализ на сходството на динамиката на индексите на реалните цени на жилищата

Разгледаните методи се прилагат при анализа на сходството на динамиката на индексите на реалните цени на жилищата за 46 държави по данни на OECD за периода 2010 г. – 2023 г. Данните са подложени предварително на стандартизация, защото се цели търсене на прилики само във формата на времевите редове.

За реализирането на клъстерния анализ с приложение на DTW подхода се използва пакета „dtwclust“ (Sardá-Espinosa, 2019b). Той предлага на потребителите множество разновидности на DTW, от които в изследването се използват две: dtw и dtw2. При първата се работи с манхатановото разстояние, а при втората – с

евклидовото разстояние (Sardá-Espinosa, 2019a).

За илюстрация на DTW подхода е включена диаграма (фиг. 1), която представя стандартизираните индекси на реалните цени на жилищата за Холандия и Ирландия и пътеката на времевото изкривяване (warping path). Установено е следното съответствие на членовете на двата времеви реда: (1,1); (2,1); (3,2); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (5,5); (6,5); (7,6); (8,7); (9,8); (10,8); (11,9); (11,10); (11,11); (11,12); (12,13); (13,13) и (14,14).



Фиг. 1. Стандартизирани индекси на реалните цени на жилищата за Холандия и Ирландия и пътека на времевото изкривяване (warping path) с приложение на DTW подхода на основата на евклидовото разстояние

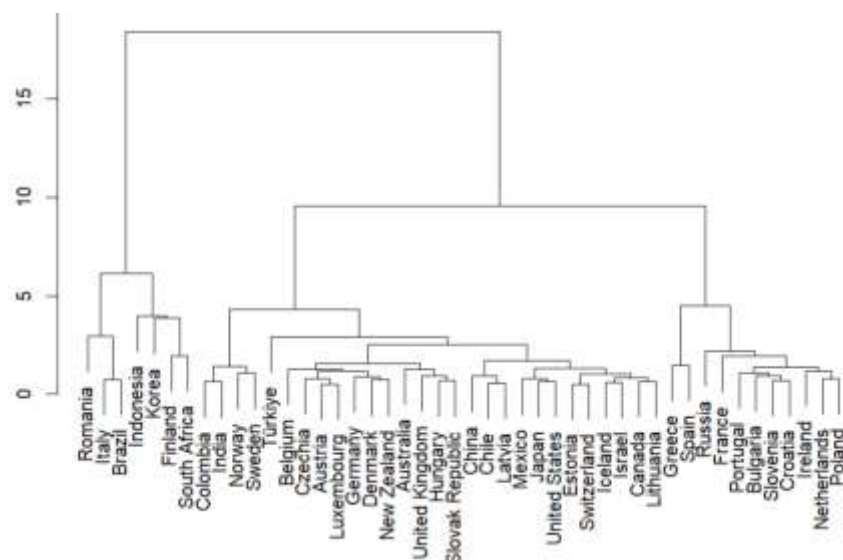
Клъстерният анализ е реализиран като йерархичен с приложение на модифицирания метод на Ward за обединяване на клъстери. Разглеждат се четири варианта. В два от тях клъстерният анализ се интегрира с DTW подхода на основата на евклидовото и на манхатановото разстояние. В другите два варианта е приложен класическият йерархичен клъстерен анализ с използване отново на същите разстояния. Броят на клъстерите се определя на основата на дендограмата и индексите за оценка на валидността на клъстерите – силуетен индекс, индекс на Dunn и индексите на Davies-Bouldin (табл. 1). При избора би следвало да се предпочете този брой на клъстерите, за който първите два индекса имат максимални стойности, а последните два – минимални.

Таблица 1

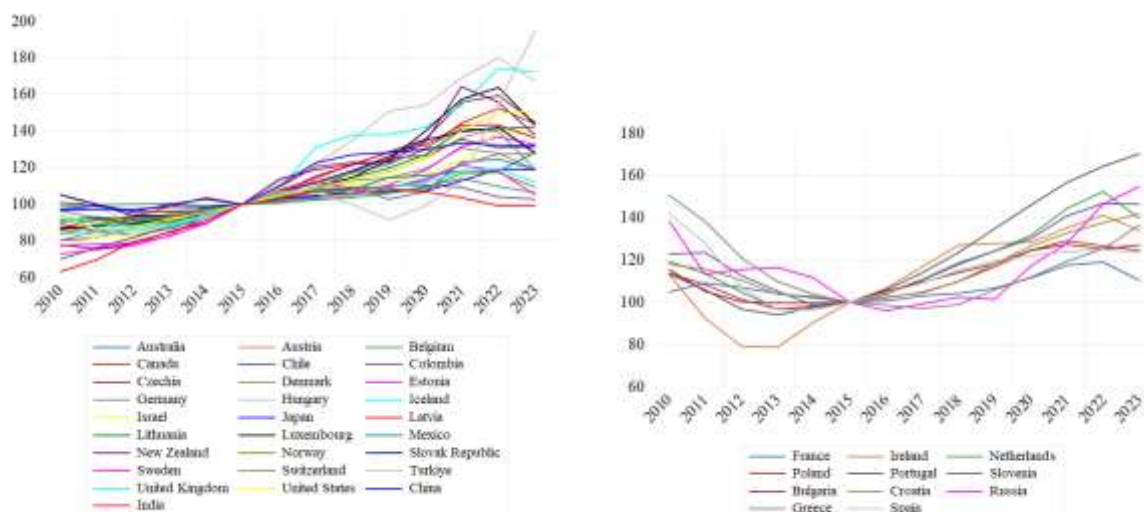
**Индекси за оценка на валидността на клъстерите за приложените четири
варианта на клъстерен анализ**

Разстояния	Брой клъстери	Силуетен индекс	Индекс на Dunn	Индекс на Davies- Bouldin	Модифициран индекс на Davies- Bouldin
DTW с евклидово разстояние	3	0,41	0,15	0,85	1,24
	4	0,40	0,21	1,08	1,32
	5	0,36	0,21	0,95	1,26
	6	0,30	0,21	0,91	1,32
DTW с манхатаново разстояние	3	0,32	0,17	1,00	1,45
	4	0,32	0,17	1,10	1,27
	5	0,32	0,25	0,81	0,94
	6	0,20	0,21	1,10	1,39
Евклидово разстояние	3	0,38	0,14	1,06	1,29
	4	0,38	0,16	0,96	1,30
	5	0,32	0,16	0,99	1,49
	6	0,33	0,18	0,93	1,30
Манхатаново разстояние	3	0,44	0,26	0,95	1,22
	4	0,42	0,31	0,90	1,01
	5	0,28	0,14	1,25	1,59
	6	0,28	0,14	0,98	1,29

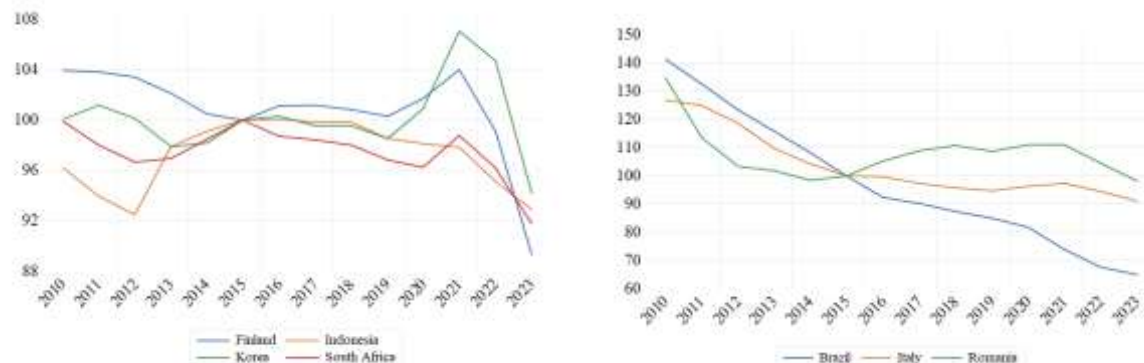
Дендограмата при приложен йерархичен клъстерен анализ, интегриран с подхода DTW на основата на евклидовото разстояние (фиг.2) показва ясно разграничени три клъстера. Индексите за оценка на валидността на клъстерите също потвърждават този избор относно броя им (табл. 1). Силуетният индекс има най-висока стойност и индексите на Davies-Bouldin имат най-ниска стойност при три клъстера, в сравнение с тези, изчислени при по-голям брой клъстери. Само индексът на Dunn при четири клъстера има по-висока стойност в сравнение с три клъстера, която стойност се задържа на приблизително същото равнище при пет и шест клъстера. Следователно на негова основа би следвало да бъде предпочетено групирането на индексите на реалните цени на жилищата за разглежданите 46 държави в четири клъстера. Това решение би се получило, ако се „отреже“ дендограмата при предходния голям скок. Първият клъстер включва Австралия, Австрия, Белгия, Великобритания, Германия, Дания, Естония, Израел, Индия, Исландия, Канада, Китай, Колумбия, Латвия, Литва, Люксембург, Мексико, Нова Зеландия, Норвегия, САЩ, Словашка република, Турция, Унгария, Чехия, Чили, Швейцария, Швеция и Япония (28 държави). Във втория клъстер са Индонезия, Корея, Финландия и Южна Африка (4 държави). Третият клъстер се състои от 11 държави: България, Гърция, Ирландия, Испания, Полша, Португалия, Русия, Словения, Франция, Холандия и Хърватия. Четвъртият клъстер включва Бразилия, Италия и Румъния (3 държави). Вторият и четвъртият клъстери се обединяват в един и така се формират три клъстера. Резултатите от клъстерния анализ са онагледени с диаграми на динамиката на индексите на реалните цени на жилищата за държавите за всеки от четирите клъстера (фиг. 3 и 4).



Фиг. 2. Дендограма при приложен йерархичен клъстерен анализ, интегриран с подхода DTW на основата на евклидовото разстояние и модифициран метод на Ward за обединяване на клъстери с използване на пакета „dtwclust“

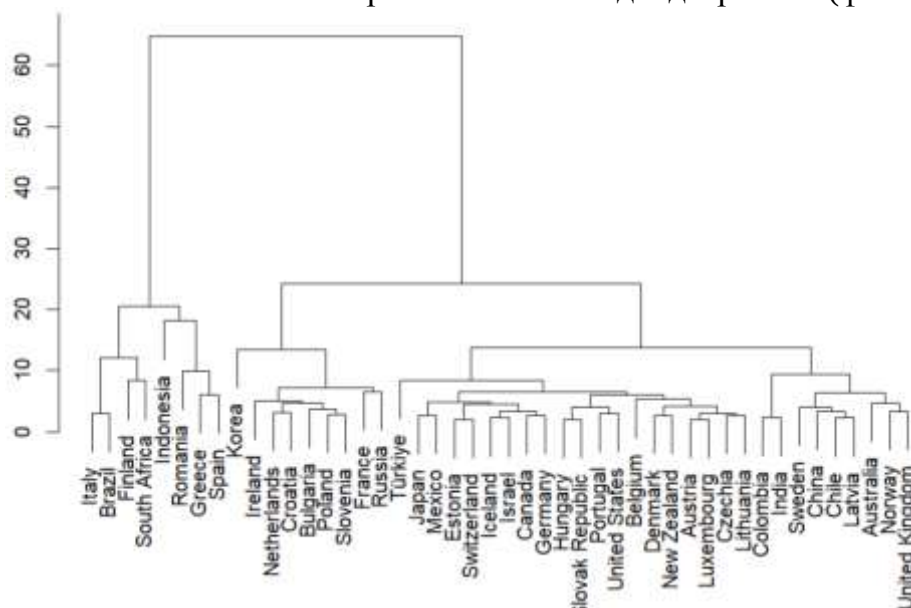


Фиг. 3. Динамика на индексите на реалните цени на жилищата за периода 2010 г. – 2023 г. за държавите от първия и третия клъстер при приложен йерархичен клъстерен анализ, интегриран с подхода DTW на основата на евклидовото разстояние



Фиг. 4. Динамика на индексите на реалните цени на жилищата за периода 2010 г. – 2023 г. за държавите от втория и четвъртия клъстер при приложен йерархичен клъстерен анализ, интегриран с подхода DTW на основата на евклидовото разстояние

При прилагане на DTW подхода на основата на манхатановото разстояние индексите за оценка на валидността на клъстерите предопределят избора на пет клъстера, което съответства на избора въз основа на дендограмата (фиг. 5).

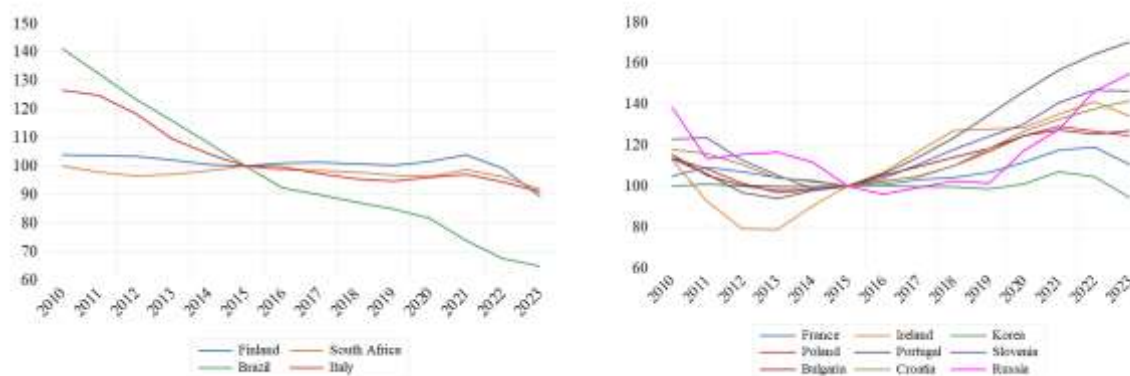


Фиг. 5. Дендограма при приложен йерархичен клъстерен анализ, интегриран с подхода DTW на основата на манхатановото разстояние и модифициран метод на Ward за обединяване на клъстери с използване на пакета „dtwclust“

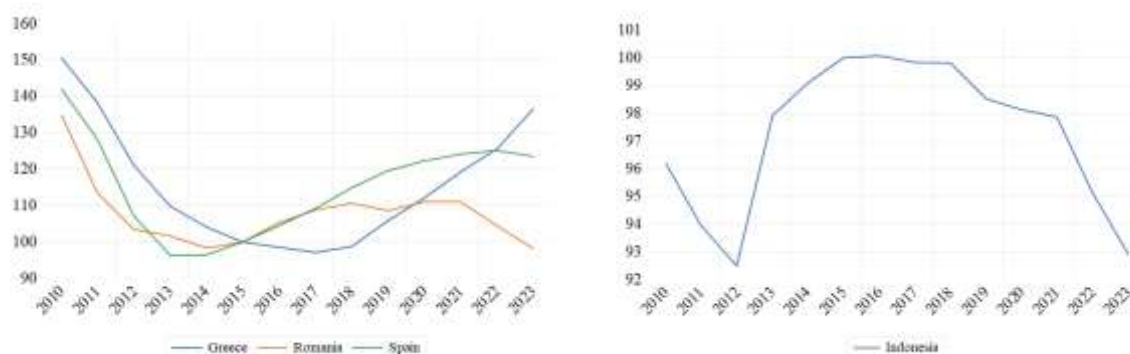
Ако се сравни съставът на петте клъстера с този на четирите при приложен DTW подход на основата на евклидовото разстояние, могат да се открият следните различия. Първият клъстер включва в добавка Португалия, която е била част от третия клъстер в предходния вариант на клъстеризация. Така първият клъстер обхваща 29 държави. Във втория клъстер попадат отново четири държави (Бразилия, Италия, Финландия и Южна Африка), но само две от тях съвпадат с предходната клъстеризация (Финландия и Южна Африка), а другите две са от четвъртия клъстер. Диаграмата на индексите за страните от новия втори клъстер показва по-голямо сходство в динамиката, в сравнение с предходната клъстеризация (фиг. 6). Третият клъстер се състои от девет държави (България, Ирландия, Корея, Полша, Русия, Словения, Франция, Холандия, Хърватия) (фиг. 6), като не включва Гърция и Испания, които при предходната клъстеризация са били в тази група. В този клъстер последно е добавена Корея, която е най-отдалечена от останалите държави в клъстера и при предходната клъстеризация е била във втория клъстер. Четвъртият клъстер включва Гърция, Испания и Румъния (фиг. 7), от които Румъния е била при предходната клъстеризация в този клъстер, заедно с Бразилия и Италия. В последния пети клъстер е единствено Индонезия, която ако се формират само четири клъстера се присъединява към четвъртия, заедно с Гърция, Испания и Румъния, въпреки че е доста отдалечена от тях.

Въпросът за избора между разглежданите два варианта на клъстеризация, при които се прилага подхода на DTW с използване на евклидово и манхатаново разстояние няма еднозначен отговор. Ако се използват индексите за оценка на валидността на клъстерите, би следвало въз основа на индексите на Davies-Bouldin и индекса на Dunn да се предпочете втория вариант на клъстеризация с петте клъстера. Само силуетният индекс дава превес на първия вариант. Разглеждането на диаграмите на динамиката на индексите също насочва към избора на подхода на

DTW с използване на манхатановото разстояние.

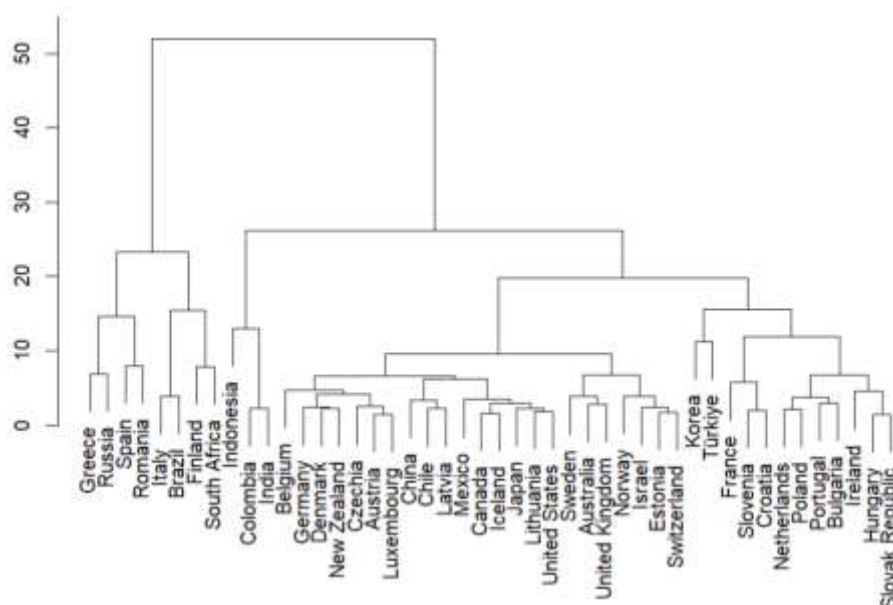


Фиг. 6. Динамика на индексите на реалните цени на жилищата за периода 2010 г. – 2023 г. за държавите от втория и третия клъстер (приложен DTW на основата на манхатановото разстояние)



Фиг. 7. Динамика на индексите на реалните цени на жилищата за периода 2010 г. – 2023 г. за държавите от четвърти и петия клъстер (приложен DTW на основата на манхатановото разстояние)

При класическия йерархичен клъстерен анализ на основата на евклидовото и разстояние индексите за оценка на валидността на клъстерите – силуетният индекс, индексът на Dunn и индексите на Davies-Bouldin предопределят избора на четири клъстера (табл. 1). Визуалната инспекция на дендограмата (фиг. 8) не отхвърля този избор, но дава основание да се разглежда възможността също за шест клъстера. Резултатите при четири клъстера се получават близки до тези при клъстерния анализ, интегриран с подхода DTW на основата на евклидовото разстояние. Броят на държавите в първия клъстер е 27, като разликата се състои във включването на Ирландия, а Индия и Колумбия са отделени в самостоятелен клъстер, заедно с Индонезия. Третият клъстер включва Бразилия, Италия, Корея, Финландия и Южна Африка, като първите две страни при първия вариант на клъстеризация са били в отделен клъстер, заедно с Румъния. Четвъртият клъстер се припокрива почти напълно с третия от първия вариант на клъстеризация, като единствената разлика е допълнително включената Румъния. Разликите с втория вариант на клъстеризация са много по-големи, от тези с първия.



Фиг. 9. Дендограма при приложен йерархичен клъстерен анализ на основата на манхатановото разстояние и модифициран метод на Ward за обединяване на клъстери с използване на пакета „dtwclust“

Заклучение

Прилагането на DTW подхода се отразява на резултатите от клъстерния анализ. Благодарение на него се намира сходство във формата на времевите редове, при които се наблюдава изместване във времето и асинхронност в динамиката. Това може да доведе до определяне на по-малък брой на клъстерите с приложение на този подход в сравнение с традиционния клъстерен анализ. Използването на евклидовото и манхатановото разстояние при DTW води до различия в състава на клъстерите. Индексите за оценка на валидността на клъстерите показват, че DTW на основа на манхатановото разстояние дава при интегрирането му с клъстерния анализ по-добре отделени клъстери. Сравнителният анализ с резултатите от класическия йерархичен клъстерен анализ показва сходство на база използваните измерители на разстоянието. Изследването може да се развие със сравнителен анализ, при който се разглежда как DTW подхода се съчетава с различните методи за свързване (обединяване) на клъстерите.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Anantasech, P. & Ratanamahatana, C.A. (2019). Enhanced Weighted Dynamic Time Warping for Time Series Classification. In: Yang, X.S., Sherratt, S., Dey, N., Joshi, A. (eds) *Third International Congress on Information and Communication Technology. Advances in Intelligent Systems and Computing*, 797. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1165-9_60
2. Arbelaiz, O., Gurrutxaga, I., Muguerza, J., Pérez, J.M., & Perona, I. (2013). An extensive comparative study of cluster validity indices. *Pattern Recognition*, 46, 243-256. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2012.07.021>
3. Berndt, D. & Clifford, J. (1994). Using dynamic time warping to find patterns in time series. *Proceedings of the 3rd International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (AAAIWS'94)*. AAAI Press, 359–370.

4. Choi, W., Cho, J., Lee, S., & Jung, Y. (2020). Fast Constrained Dynamic Time Warping for Similarity Measure of Time Series Data. *IEEE Access*, 8, 222841-222858. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3043839>
5. Everitt, B.S., Landau, S., Leese, M. & Stahl, D. (2011). *Cluster Analysis*. 5th ed, John Wiley & Sons, Ltd., ISBN: 978-0-470-97780-4.
6. Herrmann, M., & Webb, G. I. (2023). Amercing: An intuitive and effective constraint for dynamic time warping. *Pattern Recognition*, 137, 109333. <https://doi.org/10.1016/J.PATCOG.2023.109333>
7. Itakura, F. (1975). Minimum prediction residual principle applied to speech recognition. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 23(1), 67-72. doi: 10.1109/TASSP.1975.1162641
8. Matsuo, S., Wu, X., Atarsaikhan, G., Kimura, A., Kashino, K., Iwana, B. K., & Uchida, S. (2023). Deep attentive time warping. *Pattern Recognition*, 136, 109201. <https://doi.org/10.1016/J.PATCOG.2022.109201>
9. Mizutani, E., & Dreyfus, S. (2021). On using dynamic programming for time warping in pattern recognition. *Information Sciences*, 580, 684-704. <https://doi.org/10.1016/J.INS.2021.08.075>
10. Qiu, L., Qiu, C., & Song, C. (2024). ESDTW: Extrema-based shape dynamic time warping. *Expert Systems with Applications*, 239, 122432. <https://doi.org/10.1016/J.ESWA.2023.122432>
11. Ratanamahatana, C.A. & Keogh, E. (2004). Making Time-series Classification More Accurate Using Learned Constraints. *Proc. SIAM Int. Conf. Data Min., Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA*, 11–22.
12. Sakoe, H. & Chiba, S. (1978) Dynamic programming algorithm optimization for spoken word recognition. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 26(1), 43-49. doi: 10.1109/TASSP.1978.1163055
13. Sardá-Espinosa, A. (2019a). dtwclust: Time series clustering along with optimizations for the dynamic time warping distance (Version 5.5.3) [R package]. Available from <https://CRAN.R-project.org/package=dtwclust>
14. Sardá-Espinosa, A. (2019b). Time-series clustering in R Using the dtwclust package. *R Journal*, 11(1). <https://doi.org/10.32614/RJ-2019-023>
15. Tan, C. W. Herrmann, M. & Webb, G. I. (2021). Ultra fast warping window optimization for Dynamic Time Warping. *IEEE International Conference on Data Mining (ICDM), Auckland, New Zealand*, 589-598. doi: 10.1109/ICDM51629.2021.00070
16. Wang, W., Lyu, G., Shi, Y. & Liang, X. (2018). Time Series Clustering Based on Dynamic Time Warping. *IEEE 9th International Conference on Software Engineering and Service Science (ICSESS), Beijing, China*, 487-490. doi: 10.1109/ICSESS.2018.8663857
17. Zhang, K., Lin, S., Sun, H., Ma, L., Xu, J. (2022). Dynamic time warping based clustering for time series analysis. In: Wang, S., Zhang, Z., Xu, Y. (eds) *IoT and Big Data Technologies for Health Care. IoTCare 2021. Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering*, 415. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-94182-6_29

CONTEMPORARY PERSPECTIVES, OPPORTUNITIES AND CHALLENGES OF DISTANCE LEARNING IN HIGHER EDUCATION

Chief Assist. Prof. Velina Yordanova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Chief Assist. Prof. Dimitriya Karadimova, PhD
University of Economics – Varna, Bulgaria

Abstract: *This scientific material examines the modern perspectives and possibilities provided by distance learning in higher education. In view of rapidly developing technologies and changing educational requirements, distance learning is becoming an increasingly important part of the educational process. In this context, the author attempts to systematize and indicate some of the most essential features of distance learning, as well as the opportunities it provides in higher education.*

Keywords: *Higher education; Opportunities; Distance learning; Perspectives*

JEL code: *A2*

СЪВРЕМЕННИ ПЕРСПЕКТИВИ, ВЪЗМОЖНОСТИ И ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА НА ДИСТАНЦИОННОТО ОБУЧЕНИЕ ВЪВ ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ

Гл. ас. д-р Велина Йорданова
Икономически университет – Варна, България

Гл. ас. д-р Димитрия Карадимова
Икономически университет – Варна, България

През последните няколко години дистанционното обучение във висшето образование се внедрява и развива със значително бързо темпо. Няколко са основните причини, които бихме могли да посочим за това: технологичните иновации; промените в образователните модели и разбира се не на последно място ковид пандемията, която принуди света в кратки срокове да се адаптира към новата реалност. Съвременните перспективи и възможности, които предоставя дистанционното обучение във висшето образование, не само отварят нови хоризонти за студентите, но и предизвикват традиционните представи за университетското образование.

Основната цел, която авторът си поставя в настоящия доклад е да се изведат основните перспективи и възможности на дистанционното обучение във висшето образование, както и предизвикателствата, пред които е изправена академичната общност.

1. Основни предимства на дистанционното обучение

Въз основа на направен обзор на различни специализирани и научни публикации (Стоянова: 2020; Шопова и др.: 2020; Hodges, C., et al.: 2020; Baum & McPherson: 2019; Jayaratne & Moore: 2017; Varkonyi: 2017;) бихме могли да посочим някои от най-съществените предимства на дистанционното обучение, като разбира

се изрично отбелязваме, че с това въпросът с възможностите, които то предоставя не се изчерпва напълно.

Едно от основните предимства на дистанционното обучение, което бихме могли да споменем, е неговата гъвкавост. Студентите могат да учат от вкъщи, на работа или дори по време на пътуване. Това осигурява възможност за обучение, където и когато то е удобно за тях, което е особено важно в контекста на нарастващата динамика на съвременния начин на живот.

Със силното развитие на интернет технологиите, дистанционното обучение прави образованието достъпно дори за тези, които са далеч от учебните заведения. Този модел е особено полезен за студентите от различни части на света, които могат да получат качествено образование, без да бъдат ограничени от пространствени или географски фактори.

Друго предимство на дистанционното обучение е, че с неговото все по-голямо внедряване се развиват и иновациите в образователните технологии. Виртуалните класни стаи, интерактивните учебни материали и уебинарите са само част от инструментите, които предоставят богат опит на студентите. Технологии като виртуална реалност (VR) и разширена реалност (AR) създават реалистични среди за обучение, които подобряват разбирането на сложни концепции. Освен това, дистанционното обучение отваря врати за използване на множество виртуални ресурси, библиотеки и бази данни, които са на разположение за студентите. Това допринася за по-широк и дълбок обхват на изследванията и научните ресурси, които студентите могат да използват.

Важно преимущество на съвременните системи за дистанционно обучение е, че те включват функционалности, които позволяват персонализиране на образователния опит. Анализът на данни и изкуственият интелект (ИИ) се използват, за да се адаптират учебните планове и материали към индивидуалните нужди на студентите. Този личен подход стимулира по-ефективното усвояване на информацията и насърчава самостоятелното учене.

Не на последно място, дистанционното обучение облекчава и улеснява възможностите за сътрудничество между студенти от различни университети. Виртуалните проекти, обмяната на знание и обучението на различни езици създават по-широк кръгзор и гледни точки. Това помага на студентите да развиват международна перспектива и меки умения, които са от съществено значение в глобалния пазар на труда.

Важно е да споменем, че с развитието на технологиите за анализ на данни, дистанционното обучение предоставя детайлна обратна връзка за ефективността на учебния процес. Измерването на успеха на студентите, оценяването на учебните материали и определянето на силните и слабите страни в учебния процес са стъпки, които допринасят за по-добро качество на образованието.

Тук е мястото да отбележим, че дистанционното обучение играе ключова роля в адаптирането на студентите към бързо променящия се свят на труда. С развиващите се технологии и появата на нови индустрии, уменията, необходими за успешна кариера, се променят динамично. Дистанционното обучение предоставя възможност за постоянно обновяване на знанията и уменията през целия професионален живот.

Дистанционното обучение допринася за екологично и устойчиво образование. То намалява необходимостта от физическо присъствие в университетите и по-

конкретно в учебните зали, което води до намаляване на емисиите от транспорт и консумация на енергия. Този модел на обучение е по-екологично устойчив и съответства на принципите на устойчиво развитие. Освен това, той може да намали икономическите бариери за студентите, като им предостави възможност за образование без значителни разходи за настаняване и транспорт.

Друго важно предимство на дистанционното обучение е, че то има потенциал да разруши социалните и икономически бариери за достъп до висшето образование. Този модел може да предостави образователни възможности на студенти от различни социални слоеве, независимо от тяхното географско положение или финансов статус. Така се подпомага равенството в образованието и се създават равни възможности за развитие на индивидуалния потенциал.

Освен това, дистанционното обучение служи като катализатор за постоянното интегриране на нови технологии в образователните практики. Този процес стимулира развитието на иновации във висшето образование, които се отразяват положително на образователния процес. Използването на технологии като машинно самообучение и анализ на големи данни предоставя допълнителни възможности за подобряване на образователния процес.

Разбира се, от направеното до тук изложение бихме могли да обобщим, че дистанционното обучение във висшето образование предоставя значителни възможности, то също така трябва да отбележим, че в същото време в някои аспекти то е предизвикателство, което изисква голямо внимание и вземане на важни решения.

2. Предизвикателства пред дистанционното обучение

В изложението по-долу, въз основа на проучване и анализ на различни научни публикации (Стоянова: 2020; Гетова и др.: 2020; Иванов: 2014), ще се опитаме да изведем някои от по-съществените предизвикателства, пред които е изправено дистанционното обучение във висшето образование, като разбира се не претендираме за изчерпателност по този въпрос.

Едно от основните предизвикателства, което искаме да отбележим, е липсата на физически контакт между преподаватели и студенти, както и между самите студенти. Личният взаимодействиен аспект на обучението може да бъде от съществено значение за стимулиране на дискусии, разбиране на сложни теми и изграждане на образователна общност, което при дистанционното обучение липсва или е силно ограничено.

Неравният достъп до технологии е друго значително предизвикателство. Някои студенти може да се сблъскат с ограничения при интернет достъп, липса на необходими устройства или недостатъчна технологична грамотност. Това според нас може да доведе до неравенство в обучението и ограничаване на образователните възможности.

Друго важно предизвикателство пред дистанционното обучение е свързано с това, че студентите, преподавателите и персоналът трябва да разполагат със специфични умения за успешно участие в дистанционното обучение. Това включва владение на технологии, самодисциплина, умения за комуникация във виртуална среда и способности за управление на времето.

Оценяването на студентите в дистанционно обучение може да бъде истинско предизвикателство за преподавателите. Традиционните системи за оценяване могат да се окажат недостатъчни, когато се премине към дистанционно обучение и се

изисква адаптация, която да гарантира обективност и надеждност. Поради това преподавателите трябва да изградят ефективни методи за оценка, които не само да проверят знанията обективно, но и да стимулират активното участие и прилагане на умения в реални ситуации.

Отдалеченото обучение може да доведе до загуба на мотивация и ангажираност, особено ако студентите се чувстват изолирани. Именно тук е ролята на преподавателите, които трябва да използват стратегии за поддържане на мотивацията на студентите, предоставяйки структурирано и интересно учебно съдържание и стимулирайки взаимодействието между участниците.

Предизвикателство пред дистанционното обучение също така е сигурността и защитата на личните данни. Със завишените изисквания за онлайн обучение се налага и по-голямо внимание към сигурността и защитата на личните данни. Университетите трябва да гарантират сигурността на платформите за обучение и да защитават личната информация на студентите.

Въпреки че дистанционното обучение предоставя гъвкавост и достъпност, предизвикателство се крие и в поддържането на високото качество на образованието. Необходимо е да се гарантира, че студентите получават същата степен на обучение и подготовка, както и при традиционните модели на образование.

Заклучение

Дистанционното обучение във висшето образование представлява не само модерен метод на обучение, но и цялостен подход към преобразяване на образователната среда. С гъвкавостта, технологичните иновации и фокуса върху индивидуалните нужди, този модел на обучение дава възможност за развитие и растеж както на студентите, така и на образователните институции. Със своите многостранни перспективи и възможности, дистанционното обучение ще продължи да формира бъдещето на висшето образование. Предизвикателствата пред дистанционното обучение във висшето образование налагат необходимостта от интегриране на стратегии и решения, които да адресират тези проблеми. Важно е да се поддържа баланс между гъвкавостта и високото качество на образованието, за да се осигури успешно и ефективно обучение за всички студенти.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Baum, S., & McPherson, M. (2019). The Human Factor: The Promise & Limits of Online Education. *Daedalus*, 148(4), 235–254. <https://www.jstor.org/stable/48563401>
2. Getova, A., Karageorgieva, A., Mineva, S., Angelova-Igova, B. i dr. (2020) Problemi i predizvikatelstvata pred distantsionното obuchenie po vreme na izvanredno polozhenie //http://phls.uni-sofia.bg/documents/articles/3052/DOKLAD_Prouchvane-na-distancionното-oburchenie-v-SU_2020.pdf
3. Hodges, C., et al. (2020). The Difference Between Emergency Remote Teaching and Online Learning. *Educause Review*, 27.
4. Ivanov, I. (2014). Problemi na onlayn otsenyavaneto, Peta natsionalna konferentsia po elektronното obuchenie vav visshite uchilishta, Sbornik dokladi, Ruse, 295-301.

5. Jayaratne, K. S. U., & Moore, G. (2017). Perceptions of College Students toward Online Classes: Implications for Teaching Online. *NACTA Journal*, 61(4), 304–309. <https://www.jstor.org/stable/90021479>.

6. Shopova, V., Dimitrov, I., Garov, K. (2020). Vazmozhnosti na elektronno obuchenie// *Yubileyna mezhdunarodna nauchna konferentsia „Sinergetika i refleksia v obuchenieto po matematika“*, 16-18 oktombri 2020 g., Pamporovo, Bulgaria, 293-300.

7. Stoyanova, V. (2020). Neprisastveno elektronno bazirano obuchenie - vazmozhnosti i problemi. *Ikonomicheska nauka, obrazovanie i realna ikonomika: razvitie i vzaimodeystvia v digitalnata epoha* : Sbornik s dokladi ot Yubileyna mezhdunarodna nauchna konferentsia v chest na 100-god. ot osnovavaneto na IU - Varna : T. 4, Varna : Nauka i ikonomika, 4, 449-459. Third Way. (2020). *Higher Education – Online Discussion Board*. Third Way. <http://www.jstor.org/stable/resrep41727>.

8. Varkonyi, I. (2017). E-learning – Online Education and Professional Development. *Defense Transportation Journal*, 73(1), 27–30. <https://www.jstor.org/stable/26389149>

FROM THEORETICAL KNOWLEDGE TO PRACTICAL APPLICATION: FINANCIAL LITERACY IN THE BULGARIAN SCHOOL

Chief Assistant dr. Manya Maneva

*Department for Information and In-Service Teacher Training, Trakia University, Stara Zagora,
Bulgaria*

Abstract: Financial literacy is essential for preparing students to manage their personal finances responsibly and to develop skills that are useful throughout life. The purpose of this article is to demonstrate how financial education can be integrated into the teaching of mathematics, which is a basic science. Early financial education prepares students for the realities of working life, including paying taxes and making investments. This integration of financial education into mathematics not only increases students' financial literacy, but also strengthens their analytical skills, which are essential for successful personal finance management.

Keywords: Literacy; Numeracy; Financial literacy; PISA

JEL code: I210

ОТ ТЕОРЕТИЧНИ ЗНАНИЯ ДО ПРАКТИЧЕСКО ПРИЛОЖЕНИЕ: ФИНАНСОВАТА ГРАМОТНОСТ В БЪЛГАРСКОТО УЧИЛИЩЕ

Гл. ас. д-р Маня Манева

*Департамент за информация и повишаване квалификацията на учителите, Тракийски
университет, Стара Загора, България*

ВЪВЕДЕНИЕ

През последните десетилетия се наблюдава увеличаващ се интерес към финансовата грамотност на населението, тъй като тя играе ключова роля в икономическото развитие и подобряването на жизнения стандарт.

Финансовата грамотност е свързана с разбирането и управлението на личните финанси. Тя включва „познаване и разбиране на финансови концепции и свързаните с тях рискове, уменията, мотивацията и увереността да се прилага това знание и разбиране при вземането на ефективни решения в контекста на широк спектър от финансови концепции, с цел подобряване на финансовото благосъстояние на отделни хора и на обществото като цяло, както и осигуряване на активно участие в икономическия живот.“ (ЦОПУО, 2024).

МЕТОДОЛОГИЯ

Изследователският проблем е насочен към разглеждането на финансовата грамотност с акцент върху нейната същност и проявления, анализирани през призмата на учебните програми по математика в българското училище. Основният фокус е върху възможностите за интеграция на математическите знания с финансовите концепции и умения, както и върху методите за решаване на задачи, които комбинират математическа логика и реални финансови казуси. Ключов аспект от анализа е как тези задачи допринасят за развитието на важни умения у учениците, включително критично мислене, умения за вземане на решения и финансова отговорност, които са от съществено значение за тяхното бъдещо личностно и професионално развитие.

Изследването включва кратък анализ на представянето на българските ученици в международното оценяване PISA, със специално внимание към техните резултати в областта на финансовата грамотност. Целта е да се идентифицират факторите, оказващи влияние върху резултатите, както и да се оцени как българската образователна система подготвя учениците за справяне с реални финансови предизвикателства. Това включва оценка на степента, до която учебните програми по математика способстват за изграждането на практически финансови умения и идентифициране на области за подобрене, които биха могли да повишат нивото на финансова грамотност сред младите хора в България.

РЕЗУЛТАТИ

Направеното проучване на различни източници показва, че финансовото образование оказва значително влияние върху финансовото поведение на младите хора. Mandell и Klein (Mandell & Klein, 2009) отбелязват, че „учениците, които са преминали през програми за финансово образование, показват по-добри финансови навици в сравнение с тези, които не са“. Това подчертава необходимостта от интегриране на финансово образование в учебните програми.

Според Atkinson и Messy (Atkinson & Messy, 2012), „измерването на финансовата грамотност е ключово за оценка на успеха на образователните програми“. Тези изследвания предоставят основа за разработване на ефективни учебни програми, които да отговорят на нуждите на учениците.

Въпреки напредъка, предизвикателствата остават. Remund (Remund, 2010) подчертава, че „необходимостта от ясна дефиниция на финансовата грамотност е от съществено значение, за да се справим с нарастващата сложност на икономическата среда“. Brown, Collins и Schmeiser (Brown, Collins, & Schmeiser, 2014) изследват как държавно наложеното финансово образование влияе на кредитното поведение на младите хора като посочват, че „държавните програми за финансово образование могат да имат положителен ефект върху финансовото поведение на младите хора“.

Българските ученици показват разнообразни резултати в областта на финансовата грамотност, което е отразено в участието им в международното оценяване PISA.

Според доклада на OECD от 2018 г., финансовата грамотност на българските ученици е под средното ниво на страните, участващи в оценяването. Въпреки че учениците демонстрират основни познания по финансови концепции, те често срещат трудности при прилагането на тези знания в реални ситуации. Според резултатите от PISA 2018, българските ученици показват значителни различия в нивото на финансова грамотност. Докладът подчертава, че „само 29% от българските ученици са способни да решават сложни финансови задачи, докато средният процент за страните от ОИСР е 37%“ (OECD, 2018). Тези данни показват, че българските ученици имат нужда от допълнителна подкрепа и ресурси, за да развият своите умения в областта на финансите.

Според резултатите от PISA 2022 (ЦОПУО, 2024) на българските ученици не достигат почти 70 точки до средния праг по финансова грамотност, нареждайки се наравно с ученици от Малайзия, Саудитска Арабия и Бразилия, и оставайки значително по-ниско от водещите държави като Дания, Белгия и Канада.

Малко под 30% от учениците в България са запознати с термини като обменен курс и сложна лихва, докато около половината от тях имат знания за надница и

бюджет. Според учителите, проблемите с финансовата грамотност започват още в началните класове. Учебната програма по математика не осигурява достатъчно плавно надграждане на знанията, което води до трудности при усвояването на по-сложни концепции, тъй като понятието „лихва“ се изучава в 5.клас, развива и надгражда в 7.клас и 10.клас. Според учители финансовата грамотност трябва да бъде въведена по-рано и с по-подробно съдържание, за да се изградят стабилни основи (Нова ТВ, 2024)

В последната промяна на учебните програми, в сила от учебната 2024/2025 година, изучаването на понятието „лихва“ ще е в 7.клас вместо в 5.клас. Това може да носи следните рискове:

- учениците, които не се запознават с основни финансови понятия като лихва на по-ранен етап, могат да имат по-малко време и възможности да развият необходимите умения и разбиране за управлението на пари, кредити и спестявания.

- учениците в 5. клас са по-любопитни и възприемчиви към нови знания. Ако понятието „лихва“ бъде въведено по-късно, може да се пропусне възможността да се използва този естествен интерес за изграждане на основни финансови умения.

- учениците, които имат достъп до допълнителни извънкласни дейности или са от семейства с по-висока финансова култура, могат да запълнят тази празнина по-рано. Това може да увеличи неравенството между различните ученици.

- прехвърлянето на учебно съдържание в 7. клас може да доведе до натрупване на повече нови понятия и умения за усвояване в един клас. Това може да натовари учениците и да намали времето, което те могат да отделят за овладяване на всяко понятие в дълбочина още повече предстоящото НВО в края на годината и амбициите на родителите.

- ако учениците се запознаят с понятието „лихва“ по-късно, те може да изпитват трудности при справяне с практически финансови ситуации като спестяване, разходване на джобни пари или разбиране на основни банкови продукти, което може да ги постави в неизгодно положение в реалния живот.

Резултатите от PISA 2022 (ЦОПУО, 2024) показват, че българските ученици са на второ ниво от пет, което е значително под средните стойности за ОИСР. Изследователите подчертават, че семейната среда също играе роля; децата от по-бедни семейства са по-уязвими на финансови рискове. По отношение на обсъждането на финансови въпроси с родителите, 85% от учениците съобщават, че редовно говорят с родителите си за пари. Учениците, които обсъждат финансови въпроси, показват по-добри резултати в тестовете за финансова грамотност, с разлика от 35 точки в сравнение с тези, които не го правят.

„Българските ученици съобщават, че през предходните 12 месеца са учили в училище за надница (46,9%), бюджет (54,4%), предприемачество (49,8%), банков заем (48,5%) и все още знаят какво означават тези термини. По-малко съобщават, че са учили за обменен курс (28,6%) и сложна лихва (26,4%). Учениците, които съобщават, че са научили и все още знаят термини, свързани с финансите, като изплащане на лихва (39,2%), възвръщаемост на инвестицията, дебитна карта, бюджет, надница или предприемач, изпреварват учениците, които не са научили тези термини, с поне 8 точки след отчитане на характеристиките на учениците и училищата, както и на резултатите на учениците по математика и четене.“ (ЦОПУО, 2024)

Ето задача по финансова грамотност, включена в изследванията на PISA през

2012 г. и 2018 г. към 15-годишните ученици (Тодорова, 2024):

Задача: Ан е на почивка в страна, наречена Farway, но обикновено живее в Zedland. Паричната единица в Zedland е ZED. Паричната единица във Farway е FAD. По време на празника обменният курс е $1 \text{ ZED} = 25 \text{ FAD}$.

Ан се нуждае от 200 FAD, за да си купи храна. Ако тя обмени някои от своите ZED, обменното бюро ще приложи 3% комисионна. Ако изтегли FAD от банкомат във Farway, нейната банка ще ѝ начисли фиксирана такса от 2 ZED.

Да обмени ли Ан своите ZED или да изтегли FAD от банкомат?

Задачата е свързана с реална житейска ситуация, в която учениците трябва да приложат математически знания и умения за решаване на проблеми, свързани с управление на лични финанси. Тя изисква от тях да анализират информация, да извършват изчисления и да вземат информирано решение, тъй като:

- трябва да се определят количествата, свързани с паричните единици (ZED и FAD) и необходимите средства за покупка на храна. Учениците трябва да изчислят колко ZED са необходими, за да получат 200 FAD, и какви разходи ще имат при обмяна на валута и теглене от банкомат.

- разглеждат се различните разходи, свързани с обмяната на валута и тегленето от банкомат, включително комисионни и такси. Затова учениците трябва да анализират как различните такси и курсове влияят на общите разходи и да сравнят вариантите.

- моделира се ситуация, свързана с финансови разходи и се прави избор на база на изчисленията. Учениците трябва да използват математически знания, за да моделират и решат проблема като вземат предвид различни условия и разходи.

Същевременно задачи, свързани с финансовата грамотност, присъстват и на националното външно оценяване по математика (НВО) в края на 7.клас и 10.клас. Такива са например задачите, свързани с изчисляването на проста или сложна лихва, които притежават специфично икономическо съдържание, което е от съществено значение относно определянето на посоката на инвестиране на ресурси, например:

– задача 7 от НВО 2020 година за 7.клас (МОН – НВО, 2020)

7. През ноември цената на лаптоп била 1049 лв. За Коледа цената му била намалена с 10% от нея, а през януари била увеличена с 20% от новата цена. Цената на лаптопа (в лв.) след двете промени се изчислява с помощта на израза:

- А) $1049 - 0,10$
- Б) $1049 + 0,20 \cdot 1049$
- В) $1049 + (0,20 - 0,10) \cdot 1049$
- Г) $1,20 \cdot (0,90 \cdot 1049)$

– задача 10 от НВО 2024 година за 10.клас (МОН – НВО, 2024)

10. Цената на стока се увеличава с един и същ процент в две последователни години, така че от 1 лв. цената ѝ в края на втората година се повишава на 1,44 лв. Годишният процент на увеличение на цената е:

- А) 15%
- Б) 20%
- В) 22%
- Г) 44%

Именно заради представените по-горе задачи може да се твърди, че в контекста на образованието, предметът математика предлага най-подходящата основа за развитие на финансовата грамотност сред учениците. Чрез изучаване на

математически понятия и концепции учениците могат да придобият умения за планиране на лични финанси и семейни бюджети, оптимизиране на съотношението между спестявания и разходи, оценка на рисковете и вземане на информирани решения при инвестиране на средства и използване на различни финансови продукти.

По време на училищното си обучение учениците се запознават с основни финансови понятия и явления, прилагайки математически знания за извършване на изчисления. По този начин училището подготвя учениците за активен живот в пазарна среда и нови икономически отношения.

Значението на задачите, включващи елементи на финансова грамотност, е, че те демонстрират практическото приложение на математиката, което мотивира и активизира учениците в учебния процес, развива техните умения за работа с информация. При решаване на проблеми с икономическо съдържание, учениците се сблъскват с предизвикателството на алтернативния избор, който не само трябва да бъде изчислен, но и аргументиран. Този процес насърчава учениците да учат и да се самоусъвършенстват, създавайки интерес към реалностите извън училищния живот.

ПРИМЕРИ ЗА ЗАДАЧИ, ФОРМИРАЩИ ФИНАНСОВА ГРАМОТНОСТ В УЧЕНИЦИТЕ ПО ЕТАПИ НА ОБРАЗОВАНИЕТО

Начален етап – завършвайки етапа, учениците би трябвало да умеят да решават задачи от следния вид:

Задача 1: Иван трябва да закупи книга на стойност 25 лв., три химикалки за 8 лв. и четири тетрадки за 12 лв. Той разполага с три банкноти от по 10 лева и една банкнота от 20 лева. Има ли Иван достатъчно пари да заплати за покупката и колко ресто трябва да получи от продавача.

Прогимназиален етап – в 5. клас учениците изучават понятието процент и основните задачи, свързани с него. Примери за задачи с проценти, които формират финансова грамотност в учениците, са:

Пример 1: През юли цената на гроздето е 6 лв. за килограм. През август цената намалява с 20%, през септември е намалена допълнително с 5%, а през октомври гроздето поскъпва с 25%. Колко ще плати купувачът за 3 kg грозде на 15 октомври?

За решаването на този вид задачи учениците трябва да знаят и да разбират понятието процент, да изчислят намалението и увеличението на цената и да приложат тези промени към първоначалната цена, за да получат крайната цена на 15 октомври.

Пример 2: Георги желае да закупи ролери на стойност 190 лв. За да спести необходимата сума, той решава да отделя по 30 лв. всеки месец. Родителите му предлагат да вложат в банка за половин година сумата, която той би спестил за 6 месеца. Годишната лихва на банката е 12%.

а) Колко време ще отнеме на Георги да спести необходимата сума, ако спестява в касичката?

б) Каква сума ще натрупа Георги, ако приеме предложението на родителите си?

в) Коя от двете стратегии (спестяване в касичката или вложение в банката) ще доведе до по-бързо закупуване на ролерите? Обосновете отговора си.

Когато се решава тази задача е препоръчително да се създаде следната таблица:

Таблица 1

Решение на Пример 2 а)

Месец	В касичка
1	30
2	60
....	
5	150
6	180
7	210

Източник на Таблица 1: авторът

Учениците трябва да достигнат до извода, че Георги ще разполага със 190 лв. през седмия месец на спестяване.

При решаването на б) учениците трябва да съобразят, че ако родителите на Георги вложат сумата от 180 лв. в банка за половин година при годишна лихва от 12%, то крайната сума след изтичането на срока:

Крайна сума=Начална сума + Лихва= $180 + 10,80 = 190,80$ лв.

Тази сума е достатъчна за закупуването на ролерите веднага след изтичането на срока от 6 месеца.

Сравнявайки двете стратегии, учениците трябва да достигнат до извода, че вложението в банката ще доведе до по-бързо осъществяване на покупката на ролерите. Георги ще може да закупи ролерите след 6 месеца, докато при спестяването в касичката той ще се нуждае от 7 месеца. Следователно, предложението на родителите му за вложение в банката е по-изгодно и ефективно решение за постигане на финансовата му цел.

Пример 3: Цената на кафемашина е увеличена първо с 10%, след това със 120 лв. и накрая с още 5%. Каква е първоначалната цена на кафемашината, ако полученото увеличение е 31,25%?

Решение. Нека първоначалната цена на кафемашината е x лв.

След първото увеличение цената е $1,1x$ лв.

Увеличението на тази цена е със 120 лв. Тогава новата цена е $1,1x + 120$ лв.

Последното увеличение от 5% води до нова цена на продукта $(1,1x + 120) \cdot 1,05$ лв.,

която според условието е увеличаване на първоначалната цена с 31,25%.

Получаваме уравнението: $1,3125x = (1,1x + 120) \cdot 1,05$;

$0,1575x = 126$;

$x = 800$.

Отговор: Цената на кафемашината е 800 лв.

Подобни задачи са от съществено значение за развитието на изчислителните умения на учениците като същевременно им помагат да усъвършенстват работата с таблици и да придобият по-задълбочено разбиране и прилагане на понятието „лихва“ и „процент“.

Само след като учениците се запознаят с новите понятия, могат да осъзнаят причините за възникване на несъответствия. Например, ако числото x се увеличи с

числото y и след това полученият резултат се намали с y , крайният резултат отново ще бъде x . В контекста на процентите обаче, ако числото x се увеличи с 10% и след това резултатът се намали с 10%, крайният резултат ще бъде $0,99x$, а не x .

В 7. клас формирането на финансовата грамотност продължава като акцентът се поставя върху решаването на задачи, свързани с понятието сложна лихва.

Пример 4: Вложител депозира X лв. в банка. Банката се задължава да начислява по сметката му в края на всяка година $y\%$ от дохода, получен от сумата на депозита, която е била налична по сметката през текущата година. Каква сума ще бъде налична в сметката на вложителя в края на втората година?

Решение: В края на първата година сумата на депозита X лв. ще се увеличи с $X \cdot \frac{y}{100}$ лв. и ще бъде

$$Z = X + X \cdot \frac{y}{100} = X \left(1 + \frac{y}{100}\right) \text{ лв.}$$

В края на втората година сумата на депозита ще се увеличи с още $y\%$ и ще бъде

$$Z \left(1 + \frac{y}{100}\right) = X \left(1 + \frac{y}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{y}{100}\right) = X \cdot \left(1 + \frac{y}{100}\right)^2 \text{ лв.}$$

По този начин в резултат на търсенето на решение на този проблем, учениците от 7. клас достигат до формулата за сложна лихва.

В 7. клас учениците имат на разположение разнообразие от задачи, които могат да решават и да развиват своята математическа и финансова грамотност, тъй като вече са им познати понятията лихва, сложна лихва, пропорция, процент.

Ето някои примери за такива задачи:

Пример 5: Цената на мобилен телефон е 2300 лв. Използвайки кредитен калкулатор на уебсайта на магазина, Мария изчислила, че ще закупи телефона на кредит при 20% лихва за срок от 2 години. Колко ще надплати Мария, ако закупи телефона на изплащане?

Пример 6: Попълнете празните места в решението на задачата.

Футболистът получава заплата от 1 500 000 лв. за година. Данъкът върху дохода е 10%. След плащане на данъка, 5% от останалата сума се изплаща на агента на играча, 27 000 лв. са за глоба за неспортсменско поведение на терена и 20 000 лв. са за глоба за нарушаване на спортния режим. С останалите пари футболистът купува долари на цена от 1,78 лв. за 1 долар. Колко долара е купил футболистът?

Решение.

- 1) Футболистът плаща лв. данък и остават лв.
- 2) Платената сума на агента е лв. Остават му лв.
- 3) Платените глоби са общо лв.. Остават лв.
- 4) Купените долари са

Отговор: долари

Гимназиален етап – в 10. клас в образователния процес по математика се предоставя отлична възможност за актуализиране на знанията по темата и демонстриране на практическата насоченост, свързана с финансовата грамотност, при изучаване на системи линейни уравнения и прогресии.

На десетокласниците могат да се предложат следните задачи за решаване:

Пример 7: Банка предлага ипотечен кредит за закупуване на апартамент като обезпечението за кредита е самият апартамент. Периодът на погасяване е 25 години, а годишната лихва е 8%. Според условията на кредита, кредитополучателят трябва

да извърши плащане през първата година, което включва $\frac{1}{25}$ от основната сума на кредита и 8% лихва върху целия размер на кредита. През всяка следваща година, плащането включва $\frac{1}{25}$ от основната сума и 8% лихва върху оставащата непогасена част от кредита. Лихвата се преизчислява всяка година спрямо новата остатъчна сума.

Определете колко пъти общата сума, която кредитополучателят ще изплати на банката за целия 25-годишен период, надвишава първоначалния размер на кредита. Предсрочното погасяване на кредита не е разрешено според условията на банката.

Решение:

Нека размерът на ипотечният кредит е A лв. По етапно се попълва следната таблица по колони и редове:

Таблица 2

Решение на пример 7

Година	Част от основната сума	Лихва	Общо
Първа	$\frac{1}{25}A$	$0,08A$	$\frac{1}{25}A + 0,08A$
Втора	$\frac{1}{25}A$	$0,08 \cdot \frac{24}{25}A$	$\frac{1}{25}A + 0,08 \cdot \frac{24}{25}A$
Трета	$\frac{1}{25}A$	$0,08 \cdot \frac{23}{25}A$	$\frac{1}{25}A + 0,08 \cdot \frac{23}{25}A$
.....			
25-та	$\frac{1}{25}A$	$0,08 \cdot \frac{1}{25}A$	$\frac{1}{25}A + 0,08 \cdot \frac{1}{25}A$

Източник на Таблица 2: авторът

Сумата за връщане е:

$$25 \cdot \frac{1}{25}A + 0,08A \left(1 + \frac{24}{25} + \frac{23}{25} + \dots + \frac{1}{25} \right) = A \left(1 + 0,08 \cdot \left(\frac{1 + 2 + 3 + \dots + 25}{25} \right) \right) =$$

$$= A(1 + 0,08 \cdot 13) = 2,04A,$$

т.е. общата сума, която ще се върне, е 2,04 пъти повече от първоначално отпуснатата от банката като кредит.

Друг пример е следната задача:

Пример 8: Семейният бюджет се формира от заплатите на съпруга и съпругата, както и от стипендията на тяхната дъщеря, която е 240 лв. на месец. Ако заплатата на съпруга бъде удвоена, а заплатата на съпругата и стипендията на дъщерята останат непроменени, семейният бюджет ще нарасне с 50%. Ако обаче заплатата на съпруга се удвои, заплатата на съпругата се намали с 40%, а стипендията на дъщерята остане същата, семейният бюджет ще нарасне с 32,5%. Колко лева е общият семеен бюджет.

За решаването на разглежданата задача са необходими познания и развити умения за съставяне и решаване на уравнения чрез обозначаване на заплатите на съпруга и съпругата с променливи. Успоредно с това, се изискват умения за работа с проценти, което предполага разбиране на понятията процентно увеличение и намаление и прилагането им към конкретни ситуации.

Заклучение

Финансовата грамотност е от съществено значение в съвременния свят, където всеки ден се изправяме пред различни финансови решения, които могат да имат дългосрочни последици върху нашето благосъстояние. Независимо дали става въпрос за управлението на личните спестявания, планирането на семейния бюджет, вземането на кредити или избора на инвестиции, финансовата грамотност предоставя инструменти и знания, необходими за успешно справяне с тези предизвикателства.

Затова инвестирането във финансово образование и развитие на математическите умения е от първостепенно значение за всеки човек. Необходимо е още от ранна възраст да се набляга на финансовото обучение, за да се гарантира, че младите хора ще пораснат с необходимите умения и знания, за да се справят успешно с финансовите предизвикателства на живота. Освен това, продължаващото финансово образование през целия живот е от съществено значение, тъй като финансовите пазари и продукти постоянно се развиват и изискват актуални познания за ефективно управление.

В днешния свят, където финансовата информация е широко достъпна, но често трудна за разбиране, наличието на финансова грамотност може да направи разликата между финансов успех и провал. Затова всеки човек трябва да се стреми към подобряване на своята финансова грамотност, като непрекъснато развива своите знания и умения в областта на финансите. Това ще му позволи не само да избегне финансови капани, но и да се възползва от възможностите, които животът предлага, за постигане на дългосрочен финансов просперитет.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. MON, (2020). Natsionalno vanshno otsenyavane po matematika v kraja na 7.klas, https://www.mon.bg/nfs/2020/06/nvo-viikl-math_17062020.pdf

2. MON, (2024). Natsionalno vanshno otsenyavane po matematika v kraja na 10.klas, https://www.mon.bg/nfs/2024/06/nvo_10kl_math_12062024.pdf

3. NOVA TV, (2024). Uchenitsite u nas sa pod srednoto nivo po finansova gramotnost,

<https://nova.bg/news/view/2024/06/27/461145/%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%86%D0%B8%D1%82%D0%B5-%D1%83-%D0%BD%D0%B0%D1%81-%D1%81%D0%B0-%D0%BF%D0%BE%D0%B4-%D1%81%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%BD%D0%BE%D1%82%D0%BE-%D0%BD%D0%B8%D0%B2%D0%BE-%D0%BF%D0%BE-%D1%84%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BD%D1%81%D0%BE%D0%B2%D0%B0-%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%BE%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82/>

4. Todorova, N. (2024). 8 finansovi zadachi, s koito otsenyavat 15-godishnite, [https://financialliteracy.thelittlechef.bg/8-](https://financialliteracy.thelittlechef.bg/8-%d1%84%d0%b8%d0%bd%d0%b0%d0%bd%d1%81%d0%be%d0%b2%d0%b8-%d0%b7%d0%b0%d0%b4%d0%b0%d1%87%d0%b8-%d1%81-%d0%ba%d0%be%d0%b8%d1%82%d0%be-%d0%be%d1%86%d0%b5%d0%bd%d1%8f%d0%b2%d0%b0%d1%82-15-%d0%b3%d0%be/)

<https://financialliteracy.thelittlechef.bg/8-%d1%84%d0%b8%d0%bd%d0%b0%d0%bd%d1%81%d0%be%d0%b2%d0%b8-%d0%b7%d0%b0%d0%b4%d0%b0%d1%87%d0%b8-%d1%81-%d0%ba%d0%be%d0%b8%d1%82%d0%be-%d0%be%d1%86%d0%b5%d0%bd%d1%8f%d0%b2%d0%b0%d1%82-15-%d0%b3%d0%be/>

5. TSOPUO, (2024). Doklad za finansovata gramotnost na uchenitsite v Bulgaria. Sofia: Tsentar za otsenyavane v preduchilishtnoto i uchilishtnoto obrazovanie.
6. Atkinson, A., & Messy, F. A. (2012). Measuring Financial Literacy: Results of the OECD / International Network on Financial Education (INFE) Pilot Study. OECD Working Papers on Finance, Insurance and Private Pensions, No. 15.
7. Brown, M., Collins, J. M., & Schmeiser, M. D. (2014). State Mandated Financial Education and the Credit Behavior of Young Adults. Federal Reserve Bank of Chicago Working Paper Series, WP 2014-07.
8. Mandell, L., & Klein, L. S. (2009). The Impact of Financial Literacy Education on Subsequent Financial Behavior. *Journal of Financial Counseling and Planning*, 20(1), 15-24.
9. OECD, (2018). PISA 2018 Results (Volume III): What Students Know and Can Do. Paris: OECD Publishing.
10. Remund, D. L. (2010). Financial Literacy Explicated: The Case for a Clearer Definition in an Increasingly Complex Economy. *Journal of Consumer Affairs*, 44(2), 276-295.

APPLICATION OF THE MATHEMATICAL OPTIMIZATION MODEL IN THE VARIOUS SECTORS OF THE ECONOMY

Assist. eng. Julieta Mihaylova, PhD
Technical University - Varna, Bulgaria

Abstract: One of the popular definitions of economics as a science is that it studies human behaviour as a relationship between objectives and scarce resources which have alternative uses. This paper proposes that the suitable formal method for such a research is mathematical optimization. Examples from different sectors of the economy are considered. It may be concluded that mathematical optimization is fundamental to economic theory.

Keywords: Mathematical Optimization; Economics; Economic Sectors

JEL code: C65

ВЪЗМОЖНОСТИ ЗА ПРИЛАГАНЕ НА МОДЕЛА НА МАТЕМАТИЧЕСКОТО ОПТИМИРАНЕ В РАЗЛИЧНИТЕ СЕКТОРИ НА ИКОНОМИКАТА

Ас. д-р инж. Жулиета Михайлова
Технически университет – Варна, България

Въведение

Едно от популярните определения за икономиката като наука е, че тя изследва човешкото поведение като връзка между целите и оскъдните средства, които имат алтернативна употреба (Robbins, 1945). Предполага се, че изборът между няколко алтернативи е рационален. Понятието рационален едва ли може да бъде определено точно, но интуитивно може да се твърди, че рационалният избор е най-добрият възможен избор. При това е възможно да съществуват различни критерии за „най-добър“. Ако приемем, че „най-добро“ решение и оптимално решение съобразно даден критерий са синоними, то можем да кажем, че икономиката като наука се занимава с намиране на оптимални решения.

През XX век е разработена в основни линии теорията на математическото оптимизиране. Общият вид на задачата на математическото оптимизиране е: Да се намери минимумът (или максимумът) на функцията (Bradley, Hax, & Madnanti, 1977):

$$z = f_0(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

при ограничения:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_2 \\ &\dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_m \end{aligned} \quad (2)$$

В някои случаи могат да се добавят и ограниченията:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (3)$$

В задачата на математическото оптимизиране ясно се разграничават следните елементи:

- критерии за оптималност - функцията (1);
- ограничения – неравенствата (2) и (3).

Към момента не съществува ефективен алгоритъм за решаване на общата задача на математическото оптимизиране. Решени са няколко частни задачи, между които:

1. Задачата на линейното оптимизиране. При нея функциите $f_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ..., $f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ са линейни. Решима е и задачата, в която допълнително са въведени изисквания за целочисленост на всички или на някои от променливите.
2. Задачата на квадратичното оптимизиране. При нея функцията $f_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е квадратична форма, а функциите в ограниченията (2) са линейни.

Целта на настоящия доклад е да систематизира приложенията на този абстрактен модел в различни сектори на реалната икономика. Математическото оптимизиране се разглежда като обща методология, подпомагаща рационалния избор между няколко алтернативи.

Приема се класификационната схема, при която икономиката се разделя на три сектора (Fisher, 1939), (Clark, 1960):

- първичен (добив на суровини);
- вторичен (производство на крайни продукти);
- третичен (сектор на услугите).

В последните години от третичния сектор се отделя т.нар. икономика базирана на знанието. За целите на настоящето изследване такова разделяне не е необходимо.

Оптимизационни модели в първичния сектор на икономиката

Първичният сектор на икономиката включва добиването на суровини. В това число влиза продукцията на добивната промишленост, на селското стопанство, рибарство и други. Като правило първичният сектор осигурява суровини и полуфабрикати за вторичния сектор на икономиката. В някои случаи съществува директната връзка между производителите от първичния сектор и крайните потребители (например част от селскостопанската продукция).

Производството на селскостопанска продукция се характеризира със сезонност на заетостта. Това създава условия за изоставащо развитие на регионите, които са ориентирани към производството на такава. За повишаване на качеството на живот на населението в тези региони е необходимо осигуряване на постоянна заетост (включително чрез осигуряване на нови работни места в неактивните селскостопански периоди). Неравномерната заетост на работната сила може да се преодолее като част от земеделската земя се задели за технически култури, които изискват разходи на труд в неактивния сезон. Задачата може да се реши чрез прилагане на метода на линейното оптимизиране (Yudin & Golshteyn, 1969).

Една от най-широко разпространените задачи е задачата за съставяне на оптимални хранителна дажба. Селскостопанските животни ежедневно се нуждаят от минимални количества различни хранителни вещества – белтъчини, въглехидрати, мазнини, минерали и витамини. Различните типове фуражи съдържат различни

количества от тези хранителни вещества и имат различна цена. Задачата се свежда до смесване на фуражите в такива пропорции, че да се осигурят необходимите хранителни вещества при минимална стойност на сместа. Независимо от своята простота при решаване на тази задача могат да се появят подводни камъни. На първо място, е необходимо да се отчитат предпочитанията на животните. На второ място, при затваряне на цикъла на селскостопанското производство е необходимо да се има предвид и възможността за използване (или утилизиране) на отпадъчния продукт при храненето – естествената тор (Gass, 1970).

Проблем свързан със задачата за съставяне на оптимална хранителна дажба е задачата за разпределение на посевните площи за производство на различни типове фуражи. В зависимост от категорията на земята и химичния състав на почвата различните терени са благоприятни за развитието на едни или други земеделски култури. За съставяне на рационалната дажба, както беше посочено по-горе, е необходимо определено съотношение на различни фуражи. При оптимално разпределение на посевните площи за различни култури чрез използване на метода на линейното оптимизиране се максимизират средните добиви от единица площ.

В селското стопанство сериозно влияние оказва изменението на климата. Необходимо е вземане на решение относно възможностите за адаптиране и избора на алтернативи за смекчаване на последствията. За оценка на икономическите аспекти на тези въпроси се използват методите на математическото оптимизиране (McCarl & Fei, 23).

Може да се отбележи използването на методите на линейното оптимизиране в миннодобивната промишленост. При изготвяне на график за изпълнение на минните дейности се прилагат моделите на смесеното целочислено програмиране (Khazaei & Puorrahimian, 2021). За осигуряване на необходимото качество на рудата (съдържание на химични елементи в определен диапазон) е необходимо планиране на добив от рудници или отделни участъци. Изготвянето на оптимален план за добива се извършва с решаване на задачата на линейното оптимизиране (Hristova, Ilieva-Stoycheva, & Petkov, 2019).

Оптимизационни модели във вторичния сектор на икономиката

Вторичният сектор на икономиката включва предприятията, които произвеждат крайна, готова за потребление продукция или са ангажирани в строителството. При производството се използват суровини получени от първичния сектор или полуфабрикати, които са произведени от вторичния сектор, работна сила, енергия и т.н. Секторът консумира услуги генерирани от третичния сектор. Всички изброени по-горе са ресурси, които са неотрицателни и ограничени отгоре. Вземането на решение за това какво да се произвежда е избор от алтернативи при оскъдност на ресурсите и пряко кореспондира с предмета на икономиката като наука и с класическата задача на математическото оптимизиране. От това се определя широката възможност за прилагане на методите на математическото оптимизиране в сектора (Yudin & Golshteyn, 1969), (Gass, 1970).

Съществуват много частни задачи, които са предназначени за съставяне на оптимален план на производствения процес. Към тях спадат задачата за планиране на производството, при която се търси такова разпределение на наличните ресурси за производство на различни типове крайна продукция, че приходите да бъдат максимални.

В исторически план първият решена задача на линейното оптимизиране е задачата за разкрояване на материали (Kantorovich & Zalgaller, 1971). При нея критерият за оптималност е минимум на отпадъците при разкрояване. Трябва да се има предвид, че в зависимост от характера на разкроявания материал могат да се наложат модификации на задачата. Така например, при разкрояване на ролки целофан е забелязано, че изходният материал съдържа дефектни области, което налага корекция на плана в хода на неговото изпълнение (Gass, 1970).

Задачата за разкрояване на материали се разглежда в два варианта. При единия вариант се разкрояват еднакви линейни заготовки (например греди) на детайли с различна дължина. При втория вариант се разкрояват двумерни еднакви листове (например шперплат) на различни двумерни детайли.

Приложими в този сектор са и задачите за съставяне на шихти. Шихтата е смес от различни видове руди. В зависимост от съдържанието на химически елементи се получават различни сплави. За получаване на сплав с необходимите качества е нужно да се състави оптимална смес (шихта), като обикновено критерият е най-ниска себестойност. Задачата е подобна на тази за съставяне на дневна дажба. Обобщението на двете задачи е известно като задача за съставяне на оптимални смеси. В тази задача се проявява фундаменталният характер на линейното оптимизиране – една и съща математическа схема може да се използва при решаване на различни практически задачи в различни сектори на икономиката.

По подобен начин могат да се използват и други оптимизационни модели. Така например, задачата за разкрояване на линейни материали може да се използва при планиране на заетостта на машина при изпълнение на дейности с различна продължителност в рамките на еднакви работни дни. Дължината на работния ден съответства на дължината на заготовките, а времената за изпълнение на отделните дейности – на дължината на детайлите (Tokusheva, 2018).

Оптимизационни модели в третичния сектор на икономиката

Към третичния сектор се отнасят услуги като транспорт, търговия, финансови услуги, туризъм, образование и др.

В областта на транспорта е приложима транспортната задача на линейното оптимизиране. При нея са известни наличните количества продукти в определен брой изходни пунктове (производители, складове). Известни са и крайните пунктове (складове, магазини, крайни потребители), количествата от продукцията, които трябва да се доставят до всеки от тях, както и транспортните разходи за превоз между всеки от изходните и крайните пунктове. Задачата е да се направи такъв план за снабдяване на крайните пунктове, че всички потребности да са удовлетворени при минимални транспортни разходи.

Като пример за прилагане на линейното оптимизиране в областта на финансите може да е посочи построяването на инвестиционен портфейл в рамките на Модела за оценка на капиталовите активи/Capital Asset Pricing Model (MOKA/CAPM) (Watsham & Parramore, 1997). Предполага се, че са известни очакваните доходи и мярката на систематичния риск за всеки актив. Необходимо е да се разпределят инвестициите във всеки актив така, че общият доход да бъде максимален и общият систематичен риск да не надвишава предварително зададена стойност. Приема се, че функцията на дохода е сума от произведенията на инвестицията в съответния актив и очакваната доходност, т.е. тя е линейна. Първото ограничение се изразява чрез

претеглената оценка на систематичния риск, която не бива да надвишава предварително зададената стойност (има вид на линейно неравенство). Второто ограничение изразява необходимостта всички средства да бъдат инвестирани, т.е. сумата от инвестициите в отделните активи да е равна на заделените средства (има вид на линейно уравнение). Така задачата се свежда до задачата на линейното оптимизиране.

Друг подход при построяване на инвестиционен портфейл е минимизация на риска (Watsham & Parramore, 1997). Общият риск се измерва чрез дисперсията. При пресмятане на общата дисперсия на няколко актива е необходимо да се отчита освен дисперсията на всеки актив и ковариацията между всеки две двойки потенциално участващи в портфейла активи. Дисперсията на портфейла в този случай ще се изрази чрез:

$$Z = W^T \Sigma W, \quad (4)$$

където:

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_n \end{bmatrix}$$

е вектор с инвестициите в отделните активи

Σ е ковариационната матрица на отделните активи.

Изразът (4) може да се разглежда като целева функция, при която търсим минимум.

Общата доходност на портфейла може да се представи като сума от претеглените доходности на отделните активи. Желателно е тя да е не по-малка от предварително зададена стойност. По този начин се формира едно линейно ограничение.

Сумата от инвестициите в отделните активи трябва да бъде равна на планирани средства за инвестиции. Това формира второ линейно ограничение.

Изложеното до тук представлява класическа задача на квадратичното програмиране. Изразът (4) след преобразуване е квадратична функция. Посочените по-горе ограничения са линейни. Такива задачи могат да бъдат лесно решени.

Заклучение

Посочените примери показват, че моделите на математическото оптимизиране могат да намерят приложение в различните сектори на икономиката. Формалният запис на целевата функция и ограниченията пряко кореспондира с основната задача на икономическата теория.

Задачата на математическото оптимизиране, следователно, може да се разглежда като абстрактен модел на задачата на икономическата теория. Критерият за оптималност представя рационалния избор между няколко алтернативи. Ограниченията изразяват оскъдността на ресурсите и (в някои случаи) неотрицателната стойност на ресурсите.

Приложението на един и същ метод за решаване на различни типове задачи показва, че този метод има фундаментален характер. Следователно може да се направи изводът, че теорията на математическото оптимизиране има фундаментално значение за икономическата теория.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Bradley, S. P., Hax, A. C., & Madnanti, T. L. (1977). *Applied Mathematical Programming*. Addison-Wesley.
2. Clark, C. (1960). *The Conditions of Economic Progress* (3rd ed.). New York: Macmillan and Co.
3. Fisher, A. G. (1939). Production, Primary, Secondary and Tertiary. *The Economic Record*, 15(1), 24-38.
4. Gass, S. I. (1970). *An Illustrated Guide to Linear Programmig*. McGraw Hill Book Company.
5. Hristova, V., Ilieva-Stoycheva, K., & Petkov, M. (2019). An Economic and Mathematical Model for Determinig Optimal Mining with Pre-determined Quality Indicators in a Mining Enterprise. *Journal of Mining and Geological Sciences*, 62(4), 77-79.
6. Kantorovich, L. V., & Zalgaller, V. A. (1971). *Ratsionalnyi raskroi promyshlennnykh materialov*. Novosibirsk: Nauka.
7. Khazaei, S., & Puorrahimian, Y. (2021). Mathematical Programming Application in Sublevel Caving Production Scheduling. *Mining*, 1(2), 180-191.
8. McCarl, B. A., & Fei, C. J. (23). The Role and Use of Mathematical Programming in Agricultural, Natural Resource and Climate Change Analysis. *Annual Review of Resource Economics*, 15, 383-406.
9. Robbins, L. (1945). *An essay on the nature and significance of economic science* (2nd ed.). London: Macmillan and Co.
10. Tokusheva, M. (2018). A Modification of the Linear Task of Cutting up Materials. *Izvestia Journal of the Union of Scientists - Varna*, 7(3), 161-167.
11. Watshasm, T. J., & Parramore, K. (1997). *Quantitative Methods in Finance*. London: Thomson Learning.
12. Yudin, D. B., & Golshteyn, E. G. (1969). *Lineynoye Programmirovaniye (Teoriya, Metody i Prilozheniya)*. Moskva: Nauka.

CREATING LINEAR MODELS OF ECONOMIC PROCESSES: MODELLING FUEL CONSUMPTION

Assist. eng. Julieta Mihaylova, PhD
Technical University - Varna, Bulgaria

Abstract: Mathematics is a fundamental discipline in higher education. It is essential that students are motivated and that their interest in the material is stimulated so that they can acquire the basic knowledge they need as fully as possible. In this paper, it is argued that presenting the material through practical examples that have applicable solutions would lead to increased student interest.

Keywords: System of Linear Equations; Approximation Method; Fuel Consumption

JEL code: C65

СЪЗДАВАНЕ НА ЛИНЕЙНИ МОДЕЛИ НА ИКОНОМИЧЕСКИ ПРОЦЕСИ: МОДЕЛИРАНЕ НА РАЗХОДА НА ГОРИВО

Ас. д-р инж. Жулиета Михайлова
Технически университет – Варна, България

Въведение

Математиката се разглежда като фундаментална наука, защото нейните модели намират приложение в различни области. За да се гарантира качествено висше образование е от изключително значение провежданото обучение по различните фундаментални дисциплини (Milkova, 2022). Всички фундаментални инструменти до голяма степен се отдалечават от конкретните приложни области и придобиват някакво ниво на абстрактност. Например, формулата $a = b \cdot c$ може да моделира различни процеси и явления. a , b и c са символи, които могат да заместват различни изказани на естествен език съждения като например:

<лицето на правоъгълник> = <дължината на основата> . <дължината на височината>;

<изминатият път> = <скорост на движение> . <времето за движение>.

Посочените два примера не изчерпват приложението на този елементарен алгебричен израз.

Абстракцията, следователно, води до универсалност на формалния израз, но увеличава дистанцията между практиката и теорията. Изучаването на математическата теория поради своята абстрактност затруднява възприемането и от студентите. Като резултат те губят мотивация и дори изграждат мнение, че тези знания не са необходими (Madzharova, 2022). Преодоляването на такива настроения може да се извърши чрез представяне на подходящи примери свързващи теоретичните знания с тяхното практическо приложение.

Употребата на математическите символи е подобна на употребата на думите. Математическите обозначения могат да се разглеждат като особен език със строго определени граматически правила, без никакви изключения. От тази гледна точка съставянето на математически израз прилича на превод от обикновен, естествен език на езика на математическите символи (Polya, 1957). Ако задачата бъде поднесена по

такъв начин, че нейното решаване да изисква такъв превод, тя убедително би показала полезността на теоретичните знания.

В настоящата разработка е направен опит за представяне на проблемите като практически ситуации, които могат да бъдат моделирани по начина изложен по-горе.

Моделиране чрез използване на системи линейни уравнения

Разглеждаме следната ситуация. Дадено лице притежава автомобил, с който извършва пътувания в градове и между тях. При шофирането собственикът забелязва, че при зареждане на едно и също количество гориво изминава различен брой километри. Съвсем логично той стига до заключението, че разходът на гориво е различен при шофиране по градски и извънградски пътища. Собственикът решава, че е полезно да знае какъв е разходът на автомобила при различни условия.

Предполага се, че е практически невъзможно да се проведе експеримент, при който резервоарът да бъде напълнен до горе и автомобилът да се движи само в градски или само в извънградски условия.

Пътуване в рамките на едно зареждане на гориво естествено може да бъде моделирано с уравнението:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, \quad (1)$$

където:

a_1 е пътът изминат в градски условия;

a_2 е пътът изминат извън града;

x_1 е разходът на гориво за единица път при шофиране в градски условия;

x_2 е разходът на гориво за единица път при шофиране в извънградски условия;

b е количеството изразходвано гориво.

Уравнението (1) е уравнение с две неизвестни, което означава, че има безброй решения. Практическа полза от него няма, но то е важно защото показва пътя на разсъжденията, който трябва да се следва, за да се стигне до практически полезно решение. Прилагайки знанията за системите линейни уравнения веднага се стига до извода, че е необходимо още едно такова уравнение. Прибавянето на второ уравнение води до система линейни уравнения от вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (2)$$

В тази система коефициентите a_{ij} представят изминатия път за i -тия преход и j -тото условие. Тук трябва да се подчертае, че е необходимо отношението между изминатите километри в градски и извънградски условия при двата прехода трябва да бъде различно. Ако отношението е едно и също, то системата няма единствено решение.

Пример 1. При преход от 19 километра в градски и 57 километра в извънградски условия са изразходвани 5,9 литра гориво. При преход от 20 километра в градски и 43 километра в извънградски условия са изразходвани 5,0 литра гориво. Да се определи разходът на гориво за 100 километра в градски и извънградски условия.

Използваме системата (2):

$$\begin{cases} 19x_1 + 57x_2 = 5,9 \\ 20x_1 + 43x_2 = 5,0 \end{cases}$$

Решението на системата е $x_1 \approx 0,0969$; $x_2 \approx 0,0712$. Трябва да се има предвид, че това е разход за един километър. За да се получи разход за 100 километра получените числа трябва да се умножат по 100. Така получаваме, че в градски условия разходът е 9,69 л/100 км., а в междуградски – 7,12 л/100 км.

Пример 2. При преход от 15 километра в градски и 44 километра в извънградски условия са изразходвани 5,75 литра гориво. При преход от 10 километра в градски и 23 километра в извънградски условия са изразходвани 3,2 литра гориво. Да се определи разходът на гориво за 100 километра в градски и извънградски условия.

Използваме системата (2):

$$\begin{cases} 15x_1 + 44x_2 = 5,75 \\ 10x_1 + 23x_2 = 3,2 \end{cases}$$

Решението на системата е $x_1 = 0,09$; $x_2 = 0,1$. Трябва да се има предвид, че това е разход за един километър. Получаваме, че в градски условия разходът е 9,0 л/100 км., а в междуградски – 10,0 л/100 км.

Решението на Пример 2 е вярно от абстрактно-математическа гледна точка, но противоречи на практическия опит. На всеки шофьор е известно, че консумацията на гориво в градски условия е по-голяма от консумацията в извънградски условия. Следователно примери като този биха довели до усещането за нещо неправилно, за грешка. Такъв пример не би спомогнал за повишаване на мотивацията на студентите.

Моделиране чрез апроксимация

Да допуснем, че собственикът на автомобила е отчитал движението при различни условия и разхода на гориво в повече от два прехода. Следвайки логиката на предишната задача можем да моделираме ситуацията със система от повече от две уравнения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m \end{cases}, \quad (3)$$

Такива системи се наричат предефинирани (Anton & Kaul, 2019). В общия случай предефинираната система няма решение. Записана в матричен вид предефинираната система има вида:

$$AX = B, \quad (4)$$

където:

А е матрицата от коефициентите пред неизвестните;

Х е матрицата-стълб от неизвестните;

В е матрица-стълб от свободните членове;

Приблизително решение на предефинираната система може да се получи при следната последователност (Pinar, 2009):

1. Умножават се двете страни на матричното уравнение от ляво с транспонираната матрица A :

$$A^T A X = A^T B . \quad (5)$$

2. Намира се обратната матрица на матрицата $(A^T A)$.

3. Решението е:

$$X = (A^T A)^{-1} B . \quad (6)$$

Пример 3. В Таблица 1 са посочени изразходваните количества гориво при различни преходи. За целта на конкретния пример, приемаме, че в началото на всеки осъществен преход резервоарът на автомобила е изцяло пълен, а в края на прехода е изразходвано цялото налично количество гориво. Засечени са километрите изминати в градски и извънградски условия между всеки две зареждания „до горе“. Да се определи разходът на гориво за 100 километра в градски и извънградски условия.

Таблица 1

Изминати километри и изразходено гориво за осъществени преходи

	Изминато разстояние в градски условия (км.)	Изминато разстояние в извънградски условия (км.)	Изразходено гориво (л.)
Преход 1	128	396	40
Преход 2	80	420	40
Преход 3	100	404	40
Преход 4	160	332	40
Преход 5	40	520	40
Преход 6	240	220	40

Източник: Собствена разработка

Матричният вид на предефинираната система е:

$$\begin{bmatrix} 128 & 396 \\ 80 & 420 \\ 100 & 404 \\ 160 & 332 \\ 40 & 520 \\ 240 & 220 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Прилагайки (5) получаваме:

$$\begin{bmatrix} 117584 & 251408 \\ 251408 & 925456 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29920 \\ 91680 \end{bmatrix}$$

При решаване на матричното уравнение се получава: $x_1 \approx 0,1017$; $x_2 \approx 0,0714$. От тук следва, че средният разход на гориво в градски условия е 10,17 л/100 км., а в междуградски – 7,14 л/100 км.

Данните за изготвяне на практически примери трябва много внимателно да се подбират, за да може крайните резултати да бъдат близки до реалните. В противен случай ефектът

Заклучение

В заключение можем да кажем, че представянето на фундаменталните инструменти чрез практически примери от ежедневието би имало положителен ефект, що се отнася до мотивацията и по-доброто им разбиране от студентите. Различни примери биха могли да се представят на лекции и упражнения, както и да бъдат използвани като задачи за самостоятелна подготовка.

От изключително значение е при подбиране на данните да се подхожда внимателно, за да може крайните резултати да бъдат близки до реално съществуващите в практиката. Както беше представено в тази разработка, за някои задачи съществуват решения, които се разминават с реалните практики. Използването на примери, чиито решения противоречат на практическия опит е вероятно да има обратен ефект върху мотивацията и интереса на студентите към фундаменталните дисциплини.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Anton, H., & Kaul, A. (2019). *Elementary linear algebra* (12th ed.). Wiley.
2. Madzharova, T. (2022). Problems in Teaching of Mathematics in Engineering Specialities at Nikola Vaptsarov Naval Academy. *The Role of Fundamental Programs in Higher Education* (pp. 55-60). Varna: University of Economics.
3. Milkova, T. (2022). Importance of fundamental mathematics training when studying quantitative methods in logistics. *The role of fundamental programs in higher education* (pp. 61-70). Varna: Nauka i Ikonomika.
4. Pinar, M. C. (2009). Overdetermined system of linear equations. In C. A. Floudas, & P. M. Pardalos (Eds.), *Encyclopedia of optimization* (2nd ed.). Springer.
5. Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.

METHODS FOR ASSESSING THE RISK OF AN INVESTMENT PROJECT BUILT ON A PHOTOVOLTAIC SYSTEM

Imrel Nizam, PhD student
University of Economics - Varna, Bulgaria

Abstract: *The report examines risk and the management of risk factors in investment projects, with a focus on constructing a photovoltaic system for electricity generation in Bulgaria. The assessment of investment risk is crucial due to the high uncertainty and the scale of capital investments. The project includes identifying risk factors, quantitative measurement, planning management measures, and monitoring the execution of risk-related activities. Various approaches to risk measurement are introduced, including statistical methods such as variance analysis, which allow for assessing deviations in returns and forecasting future income. The report also explains specific risks associated with photovoltaic projects, such as technological risk (equipment and system selection), risks from weather conditions and the nature of solar radiation, financial risks from fluctuations in component prices, and business risk from market fluctuations. To minimize adverse effects, strategies such as monitoring, pre-negotiation with suppliers, and planning emergency actions are suggested.*

Keywords: *Risk, Investment projects, Returnability*

JEL code:

МЕТОДИ ЗА ОЦЕНКА НА РИСКА НА ИНВЕСТИЦИОНЕН ПРОЕКТ ЗА ИЗГРАЖДАНЕ НА ФОТОВОЛТАИЧНА СИСТЕМА

Докторант Имрел Низам
Икономически университет - Варна, България

Въведение

Практиката на оценяване и управление на риска в различни сфери на човешката дейност намира все по-широко приложение и в условията на пазарна икономика в България. Необходимостта от идентификация и оценяване на рисковите събития и предприемане на действия за справяне с риска са много полезни за насочване на бизнеса в правилната посока при за постигане на поставените цели – стратегически, тактически или оперативни.

Инвестиционните проекти са типични рискови проекти. Неопределеността относно бъдещето при тях е значително по-голяма в сравнение с много други видове проекти. Необходимостта от управление на риска може да се аргументира с особеностите на този вид проекти и свързаните с тях значителни рискове, в противен случай има голяма вероятност да не бъдат постигнати проектните цели в зададените времеви и ресурсни рамки. И е осъществимо поради това, че чрез прилагането на някои методи, които ще бъдат разгледани в доклада, може да се намали негативния ефект от възникване на потенциални рискови събития.

Целта на доклада е да се представи теоретичен и методичен инструментариум на оценка на риска при изграждане на фотоволтаична система за производство на електроенергия от възобновяеми енергийни източници и да се въведат методи за измерване на риска, включително статистически методи като дисперсионен анализ, които позволяват оценка на отклоненията във възвръщаемостта и предвиждане на

бъдещи доходи. С цел минимизиране на неблагоприятните ефекти се предлагат стратегии като мониторинг, предварително договаряне с доставчици и планиране на действия в извънредни ситуации.

Риск при реализиране на инвестиционен проект

Инвестиция в широк смисъл на думата се интерпретира като превръщане на ликвидните средства на предприятието в други имуществва. Инвестициите са „парични средства за закупуване на активи, които могат да осигурят получаване на доход, прираст на капитала и други положителни резултати за инвеститора в продължение на дълъг период“ (Николов, 1994). Обектите на капиталовложенията имат различен характер.

За намиране и анализиране „ефективността на инвестициите се използват различни методи като повечето от тях се основават на привеждането на доходите и инвестиционните разходи към определен момент от време, обикновено към началото на осъществяването на инвестицията или към момента на завършване.“ (Николаев и Милкова, 2023). Според инвестиционната теория даден капитал е толкова по-ценен, колкото по-рано се притежава. Същността на проблема се заключава в способността на капитала да нараства при инвестиране.

Инвестиционният риск е вероятността да се понесат загуби в резултат на инвестиции. Той включва различни фактори, като функционирането на пазара, икономически условия, политически събития и специфични рискове, свързани с определени активи или индустрии.

Разнообразните дейности при реализирането на инвестиционния проект могат да бъдат „проектиране, подготовка на фирмата за иновация, опитно производство и маркетингови дейности“ (Георгиев и Цветков, 1997), които могат да бъдат съчетани във времето, независимо от разнообразието и специфичните им особености.

Рискът при проектирането – дейностите са насочени основно към проектиране, технология на производство, изготвяне на технологична документация и др. Разработва се идеен проект с различни възможни варианти за техническо решение.

Рисковете при проектирането най-често се свързват със:

- ✓ Във фазата „идеен проект“ – рационален избор на вариант.
- ✓ Рационален избор на техническо решение.
- ✓ Конструкцията на новия продукт – недостатък, пропуск или несъответствие с изискванията на потребителите.
- ✓ Избора на неефективно или некачествено технологично оборудване и на доставчик/производител за него.

Рискът при подготовката на фирмата за инвестиция и иновация – дейностите са свързани с осигуряване на необходимите финансови средства за осъществяване на проекта, организационна и технологична подготовка и подготовка на персонала. Тук рисковете са изключително разнообразни по характер, но могат да бъдат групирани условно по следния начин:

- ✓ Нерационален избор на източници за финансиране на проекта по отношение на висока цена на финансирането и/или висок финансов риск.
- ✓ Неправилен избор на проектния екип.
- ✓ Нерационална организационна структура.

- ✓ Неправилен избор на кадри и направление за повишаване на квалификацията, неефективно и некачествено обучение.
- ✓ Недостатъчна информация за характера на иновацията.

Рискът при опитното производство и усвояването му

На база на работния проект се изработва опитен образец от новия продукт, който се подлага на изпитания по предварително проектирана методика за откриване и отстраняване на допуснатите технологични и конструкторски недостатъци и свързаните с тях корекции на работната документация.

При усвояване на производството, усилията на ръководителите са насочени към достигане на проектираните технически и икономически параметри на производствения процес. Рисковете могат да бъдат свързани с:

- ✓ Възможност да останат скрити и не проследени конструктивни и технологични недостатъци.
- ✓ Не достигнато качество.
- ✓ Удължаване периода на усвояване на производството и/или утежняване условията за работа в по-висока степен от предвидената.

Рискът при маркетинговите дейности – основно насочена към проучване на възможните пазари за новия продукт, на размера на целевия пазар и прогнозиране на пазарния дял, на съответствието между характеристиките на новия продукт и изискванията на потенциалните потребители, на насоките за бъдещо усъвършенстване на продукта, пазарни тествания на новия продукт и др.

Рисковете за проекта могат да бъдат:

- ✓ Прекалено оптимистични прогнози за обемите на целевите пазари и прогнозния пазарен дял за всеки от тях.
- ✓ Неточна оценка на изискванията на потребителите и очакваното съотношение „цена – търсене” на новия продукт.

Управление и методи за оценка на риска при инвестиционен проект

Управлението на риска е задължителен елемент от процеса на цялостното управление на проекта и се извършва през целия му жизнен цикъл. Всеки един проект е динамичен и е свързан с непрекъснати промени във време, пари, участници, следователно винаги съществува определен риск, който трябва да бъде управляван.

Най-често практиките, свързани с управление на риска в проект се обособяват в няколко, неразделни сами по себе си, групи от дейности. За постигане на по-голяма яснота се диференцират в четири групи:

- Идентификация
- Количествено измерване
- Определяне на действията в отговор на рисковете
- Контрол на тези действия.

За измерване на инвестиционния риск се използват два подхода, изградени съответно на:

- исторически данни – установява се проявлението на риска в миналото, като се прави статистически анализ на динамичния ред, който е съставен от исторически данни за възвращаемостта на дадена инвестиция за еднакви периоди от време. Основният замисъл тук е, че и в следващите бъдещи периоди рискът ще запази своя размер.

- вероятностни данни – предварително се определят бъдещите числови стойности на нормата на възвращаемост, при различни проявления на обуславящите фактори. С помощта на регресионния анализ и историческите данни се определят прогнозните стойности и вероятностните очаквани резултати. Този метод не се използва много често в практиката, т.н. определянето на факторите има малко или много субективен характер.

Инвестиционният риск „се свързва с неопределеността на нормата на възвращаемост и може да се дефинира като възможното отклонение на реалната норма на възвращаемост от очакваната“ (Николаев, Атанасов и Мирянов, 2014). Дефиницията създава предпоставки за намиране на математико-статистически методи за количествена оценка на риска и последващото му анализиране – качествена оценка.

С голямо практическо приложение при измерване на инвестиционния риск е дисперсионният анализ чрез количествено измерване на колебливостта и варирането на членовете на статистическия ред. А ако този ред представлява „динамичен ред на нормата на възвращаемост, тази количествена мярка всъщност представлява измерител на риска“ (Николаев, Атанасов и Мирянов, 2014). Дисперсионният анализ използва следните показатели – ранг на вариацията, дисперсия, стандартно отклонение, коефициент на вариация, семи дисперсия и семистандартно отклонение.

Ранг (размах) на вариацията – намира статистическото разсейване като разлика между най-големия и най-малкия размер на възвращаемостта (вариращия признак). Изчислява се чрез формулите:

- в относителни величини,

$$r_{rel} = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{\bar{r}} \times 100 \quad (1)$$

- в абсолютни величини,

$$r_{abs} = r_{\max} - r_{\min}, \quad (2)$$

където: $r_{\max}$ – най-голямата норма за възвращаемост;
 $r_{\min}$ – най-малката норма за възвращаемост;
 $\bar{r}$ – средно претеглена възвращаемост.

При инвестиции с период повече от една година е възможно на практика през различните години възвращаемостта да не е еднаква. В такива случаи като сравнителен показател се използва **средната годишна възвращаемост**, която показва темпа на нарастване и се изчислява по три начина:

- средноаритметична възвращаемост,

$$\bar{r}_A = \frac{\sum_{t=1}^T r_t}{T} \quad (3)$$

- средногеометрична възвращаемост,

$$\bar{r}_G = \sqrt[T]{\prod_{t=1}^T r_t} \quad (4)$$

- среднохармонична възвращаемост,

$$\bar{r}_H = \frac{T}{\sum_{t=1}^T \frac{1}{r_t}} \quad (5)$$

където: r_t – възвращаемост през година t ;

T – брой на годините в инвестиционния период.

Разгледаните формули за средни величини се отнасят за величини от дискретен непретеглен вариационен ред – всички значения по признака участват с равни тегла в изчисленията. Съществуват и величини от дискретен претеглен вариационен ред, където някои от значенията участват с различни тегла. В зависимост от информацията с която се разполага, се избира формула съответно от претеглен или непретеглен вид.

Дисперсията е „мярка за степента, в която вариращият признак (възвращаемост) се отклонява от своята средна стойност“ (Мирянов, Петков, Йорданова, 2015) или мярка за разсейването около средното. Пресмята се по формулите:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad (6) \quad \text{или} \quad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n} \quad (7)$$

където r – възвращаемост на i -я период;

- средна възвръщаемост;

f_i – броят на наблюдаваните случаи;

n – брой периоди.

Стандартното отклонение е положителния квадратен корен на дисперсията. То е числова величина, която също като дисперсията отразява разсейването на множеството от наблюдения около средното. Тя е с размерност, каквато е самата случайна величина. В приложната статистика стандартното отклонение се изчислява по формулата:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (8)$$

където σ е стандартното отклонение.

При използване на втория вероятностен подход, се използват и следните формули:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (r_i - Er)^2 \cdot p_i \quad (9)$$

$$Er = \sum_{i=1}^n r_i \cdot p_i \quad (10)$$

където: E_r – очакваната възвращаемост или математическото очакване на възвращаемостта;

r_i – възвращаемостта при i -тото проявление на обуславящите фактори (състояние на икономиката);

p_i – вероятността за очаквания резултата при i -тото проявление на обуславящите фактори.

Дисперсията и стандартното отклонение са величините, които най-точно се доближават до теоретичното. Те изразяват отклонението от средната стойност (риска) в абсолютен вид, без да отчитат изменението на тази средна стойност. „Но при еднаква дисперсия инвестиционен актив с по-малка средна възвращаемост е по-рисков. Коефициентът на вариация отстранява този недостатък на дисперсията и стандартното отклонение като измерител на риска“ (Дочев и Николаев, 2007).

Формулата за определяне на **коефициента на вариация** е следната:

$$V_{\sigma} = \frac{\sigma}{r} \times 100 \quad (11)$$

„Коефициентът на вариация изразява рисковаността на единица доход.“ (Атанасов, Николаев, Мирянов, 2014). Той се използва като мярка за разсейването (колебанията) около средна норма. Колкото по-силна е вариацията, толкова по-голямо е разсейването на възможните резултати. Като относителна величина варира от 0 до 1. Когато вариационният коефициент приема по-високи стойности, тогава и колебанието е по-голямо.

Логично е да се мисли, че най-често използваните методи при управлението на проектните рискове са експертните. Методите за експертна оценка включват комплекс от логически и статистически процедури по преработката на информация, необходима за анализа и последващо вземане на решение в условията на риск. Централна фигура в експертната процедура се явява самият експерт – специалист, който чрез своите способности намира ефективно решение. Тези методи не са предмет на разработката.

Кратко описание на проекта

Настоящият инвестиционен проект е свързан с изграждане на фотоволтаична електроцентрала за производство на електрическа енергия, с инсталирана обща мощност 100 kWp в гр. Силистра.

Необходимата инвестиция за реализацията на инвестиционното намерение е в размер на 100 000 лева. Очакван живот на системата – 25 години. Минималният срок за изпълнение на проекта за изграждане и въвеждане в експлоатация на оборудването ѝ е до 6 месеца - подготвителни работи, доставка на оборудването, подготовка за монтиране на модулите и инверторите, монтиране и въвеждане в експлоатация на цялата централа.

Фирмата е с правна форма – дружество с ограничена отговорност. Размерът на внесенения капитал е 20 000 лв. Предприятието към настоящият момент разполага с активи във вид на имоти, върху които се предвижда да се изгради фотоволтаичната електроцентрала. Тъй като дейността на фирмата е стартираща, едва след реализацията на настоящия проект, прогнозно се очаква годишно да бъдат произвеждани 163 200 kWh. За реализацията на проекта фирмата ще използва кредит в размер на 80 000 лева.

Климатичната зона около гр. Силистра е много благоприятна по отношение на слънчева радиация и инсталацията ще работи с максимална ефективност.



Фигура 2. Средно годишна слънчева радиация

Специфичните рискове, свързани с фотоволтаични проекти са:

Технологичен риск

Развитието на енергийни проекти, използващи нови и не напълно развити технологии на основата на възобновяеми енергийни източници като цяло е по-скъпо, дори в случаите, когато първичният енергиен източник е безплатен (в случая слънчева енергия), в сравнение с традиционните енергийни проекти. Затова и рискът е свързан с възможността да се избере некачествено оборудване /соларни панели, инвертори и други/, което може да доведе до по-ниска ефективност и преждевременна амортизация. Минимизирането на риска е чрез избор на утвърдени производители, проверка на техническите спецификации и съответните гаранции. Друг риск е неоптимален дизайн на системата – не е правилно проектирана или точно неправилен ъгъл на панелите, разположение или наклон, който може да се преодолее с консултация със специалисти.

Риск, свързан с характера на първичния енергиен източник или природни рискове

Неблагоприятните метеорологични условия – облаци, снежни покривки, градушки могат да намалят производителността на системата или да повредят панелите. Рискът, че слънчевата енергия или годишната часова продължителност на слънчевата радиоактивност може да не отговарят на необходимите критерии би се отразило върху разходите за експлоатация, техническа поддръжка и съответно до намалено генериране на електроенергия и намаляване на приходите от продажба на електрическа енергия. Но районът се характеризира с най-висока за страната годишна продължителност на слънчевото греене и липсващи мъгливи дни. Минимизирането на риска може да се осъществи с мониторинг на прогнозите за времето и използване на застраховки за защита от природни бедствия.

Финансови рискове

Промените в цената на материалите и по-конкретно увеличаване на разходите за закупуване на панели, инвертори и други компоненти, погрешни прогнози за производителността и доходността може да доведат до по-ниска рентабилност от очакваното. Преодоляването на подобни рискове може да се осъществи чрез сключване на фиксирани договори с доставчици и предварителни разчети за цялостната стойност на проекта.

Друг финансов риск, който е свързан с евентуалните неблагоприятни промени в конкретните пазарни и икономически условия, в които функционира предприятието, например преразходи по време на изграждането, особено когато технологията не е била активна на пазара. Преодоляването може да се осъществи чрез планиране на непредвидени ситуации: създаване на план за действие в случай на извънредни ситуации, което включва процедури за кризисно управление – ключово за минимизиране на вредите от негативни събития.

На база на информация на Българската независима енергийна борса са изчислени средни месечни цени и средна годишна цена /12 месеца назад/ на електрическа енергия за периода от месец октомври 2023г. до месец септември 2024г.

Таблица 1

Средни месечни цени и средна годишна цена /12 месеца назад/ на електрическа енергия.

Дневна цена на електрическа енергия на Българска независимата енергийна борса в пазарен сегмент "Ден напред"												
	2023 г.			2024 г.								
	Октомври	Ноември	Декември	Януари	Февруари	Март	Април	Май	Юни	Юли	Август	Септември
1	144,01	212,24	175,73	36,96	189,41	138,06	62,72	74,25	135,30	146,05	243,63	188,92
2	205,25	217,09	197,02	136,46	176,58	128,36	65,53	100,94	90,30	45,49	226,61	449,95
3	165,77	159,26	167,20	118,83	148,31	119,87	140,53	150,37	232,79	189,17	177,41	410,46
4	165,03	94,17	241,48	159,11	97,58	146,74	123,58	132,70	230,76	223,77	150,16	387,59
5	212,42	57,43	256,12	190,04	120,54	148,09	103,19	98,01	207,35	214,31	266,13	252,83
6	214,44	189,44	253,73	173,72	128,35	159,25	83,16	162,46	212,48	211,76	240,04	261,19
7	139,40	252,97	238,06	167,21	155,45	159,21	43,96	178,05	184,89	198,46	230,04	175,91
8	159,47	203,24	211,78	190,27	175,65	154,04	115,76	174,71	149,39	146,36	260,74	140,59
9	242,83	207,63	190,31	212,45	141,58	107,72	97,76	156,31	109,05	116,16	229,22	308,93
10	272,19	204,27	149,11	220,16	141,39	75,38	116,93	152,16	186,30	234,70	170,55	260,41
11	246,94	194,77	209,37	218,41	97,66	131,76	105,60	113,40	186,87	237,39	138,03	288,47
12	242,61	196,24	247,90	214,00	147,03	133,59	91,64	91,98	213,46	232,69	212,89	264,48
13	270,87	254,12	217,81	192,46	148,15	151,25	42,74	189,70	200,93	221,31	284,07	188,09
14	177,69	204,87	208,14	172,42	142,12	143,37	54,90	201,79	155,51	190,29	263,56	127,75
15	137,28	224,34	188,89	185,53	106,04	119,82	129,42	198,32	86,75	90,31	217,06	126,36
16	250,28	221,93	160,48	217,79	126,94	131,67	111,49	197,66	135,16	98,33	293,47	237,21
17	338,51	230,57	132,09	235,32	122,02	115,22	0,00	186,68	216,90	228,44	219,91	260,10
18	253,56	134,36	182,73	193,82	111,93	149,75	163,85	145,87	225,45	227,91	199,63	198,27
19	229,25	78,39	196,26	161,46	142,51	162,94	137,46	153,31	199,18	251,06	331,32	162,67
20	205,43	216,26	188,62	161,92	153,79	129,38	106,53	180,56	226,00	264,91	320,54	158,34
21	131,08	242,81	200,58	134,71	156,87	146,47	104,88	173,19	250,14	266,22	303,16	149,71
22	139,13	239,29	151,37	176,74	147,50	128,04	168,61	176,61	162,05	195,11	226,74	147,07
23	267,72	229,15	54,17	197,34	107,21	92,70	198,87	188,98	142,27	135,16	271,94	213,67
24	248,02	189,00	75,87	186,59	110,17	59,73	162,79	191,40	238,44	220,88	191,51	190,03
25	241,73	190,67	24,60	185,46	118,49	138,59	180,74	128,98	382,75	212,16	127,33	171,61
26	246,31	176,57	46,67	180,90	131,11	124,39	162,34	119,63	260,40	218,03	318,78	166,90
27	238,84	252,24	110,88	150,07	143,78	132,97	118,69	195,85	242,96	189,76	320,66	130,95
28	182,34	211,95	83,20	137,12	149,53	90,98	51,74	199,42	196,98	204,98	369,26	65,75
29	81,48	251,05	46,64	161,76	135,04	67,29	107,78	191,10	178,45	164,25	385,27	90,22
30	214,91	296,63	69,15	170,62		91,01	115,60	188,91	105,49	105,97	289,27	109,01
31	209,09		72,50	186,63		64,61		190,54		183,58	201,81	
Средна цена за месеца	208,83	201,10	159,63	175,04	136,99	123,94	108,96	160,77	191,49	189,19	247,77	209,45
Средна годишна цена												176,10

Източник: разработено от автора

Основни параметри на модела – първоначална инвестиция 100 000 лв., инсталирана мощност 100 kWp, очакван живот на системата 25 години, годишно производство на електроенергия 1 632 kWh за гр.Силистра, изкупна цена на енергията – средната годишна цена за България 0,17 лв., оперативни разходи 2 800 лв. на година, процент на амортизация 4%.

Разгледани и анализирани са 6 сценария на бизнес план с промени в ключовите параметри като изкупна цена на електроенергията и промяна в производителността на системата–капацитет и тяхното влияние върху възвращаемостта.

Оптимистични сценарии:

1. Цена на електроенергия – повишение на 0,18 лв.
Слънчева радиация - повишение 100% капацитет.
2. Цена на електроенергия – повишение на 0,18 лв.
Слънчева радиация се запазва 90% капацитет.

Реалистични сценарии:

1. Цена на електроенергия – не се променя 0,17 лв.
Слънчева радиация 90% капацитет.
2. Цена на електроенергия – не се променя 0,17 лв.
Слънчева радиация 100%.

Песимистични сценарии:

1. Цена на електроенергия – понижение на 0,16 лв.
Слънчева радиация се запазва 90% капацитет.
2. Цена на електроенергия – понижение на 0,16 лв.
Слънчева радиация - понижение 80% капацитет.

А/ Оптимистични сценарии:

Таблица 2

Допустими норми за проекта при цена 0,18 лв. и 100% максимален капацитет

	Показатели	Допустими норми	Показатели, след анализ на Бизнес плана
1	Нетна настояща стойност	$NPV > 0$	59 307,04
2	Вътрешна норма на възвращаемост	$IRR > 6\%$	17,06%
3	Индекс на рентабилност	$PI > 1$	1,59
4	Срок на откупуване	$PBP < 10$ години	5 г. 8 мес.

Източник: разработено от автора

Таблица 3

Допустими норми за проекта при цена 0,18 лв. и 90% капацитет

	Показатели	Допустими норми	Показатели, след анализ на Бизнес плана
1	Нетна настояща стойност	$NPV > 0$	41 739,99
2	Вътрешна норма на възвращаемост	$IRR > 6\%$	13,98%
3	Индекс на рентабилност	$PI > 1$	1,42
4	Срок на откупуване	$PBP < 10$ години	6 г. 6 мес.

Източник: разработено от автора

Б/ Реалистични сценарии:

Таблица 4

Допустими норми за проекта при цена 0,17 лв. и 90% капацитет

	Показатели	Допустими норми	Показатели, след анализ на Бизнес плана
1	Нетна настояща стойност	$NPV > 0$	32 010,54
2	Вътрешна норма на възвращаемост	$IRR > 6\%$	12,22%
3	Индекс на рентабилност	$PI > 1$	1,32
4	Срок на откупуване	$PBP < 10$ години	7 г. 1 мес.

Източник: разработено от автора

Таблица 5

Допустими норми за проекта при цена 0,17 лв. и 100% максимален капацитет

	Показатели	Допустими норми	Показатели, след анализ на Бизнес плана
1	Нетна настояща стойност	$NPV > 0$	48 496,55
2	Вътрешна норма на възвращаемост	$IRR > 6\%$	15,18%
3	Индекс на рентабилност	$PI > 1$	1,48
4	Срок на откупуване	$PBP < 10$ години	6 г. 2 мес.

Източник: разработено от автора

В/ Песимистични сценарии:

Таблица 6

Допустими норми за проекта при цена 0,16 лв. и 90% капацитет

	Показатели	Допустими норми	Показатели, след анализ на Бизнес плана
1	Нетна настояща стойност	$NPV > 0$	22 281,09
2	Вътрешна норма на възвращаемост	$IRR > 6\%$	10,40%
3	Индекс на рентабилност	$PI > 1$	1,22
4	Срок на откупуване	$PBP < 10$ години	7 г. 9 мес.

Източник: разработено от автора

Таблица 7

Допустими норми за проекта при цена 0,16 лв. и 100% капацитет

	Показатели	Допустими норми	Показатели, след анализ на Бизнес плана
1	Нетна настояща стойност	$NPV > 0$	37 686,05
2	Вътрешна норма на възвращаемост	$IRR > 6\%$	13,25%
3	Индекс на рентабилност	$PI > 1$	1,38
4	Срок на откупуване	$PBP < 10$ години	6 г. 9 мес.

Източник: разработено от автора

На база на тези допустими норми и показатели е направена оценка на инвестиционния риск – стандартно отклонение, дисперсия и коефициент на вариация.

Таблица 8

Възвращаемост в дни и години

№	Цена в лева	Възвращаемост в години		Възвращаемост в дни	
		Прогнозна слънчева радиация - максимален капацитет 100%	Настояща слънчева радиация - Капацитет 90%	Прогнозна слънчева радиация - максимален капацитет 100%	Настояща слънчева радиация - Капацитет 90%
1	0,16	6 г. 9 мес.	7 г. 9 мес.	2460	2825
2	0,17	6 г. 2 мес.	7 г. 1 мес.	2250	2585
3	0,18	5 г. 8 мес.	6 г. 6 мес.	2065	2370

Източник: разработено от автора

Таблица 9

Изчисляване на дисперсия, стандартно отклонение и коефициент на вариация

	Възвращаемост в години		Възвращаемост в дни	
$\bar{x}$ Средна възвращаемост	6 г. 2 мес.	7 г. 1 мес.	2258	2593
σ^2 Дисперсия			26039	34539
σ Стандартно отклонение	5 мес.	6 мес.	161	186
$V\sigma$ Коефициент на вариация			7 %	7%

Източник: разработено от автора

Тези резултати показват как различни условия могат да повлияят на възвращаемостта и печалбата на даден проект. В оптимистичния сценарий увеличението на цената на електроенергията и по-високия капацитет водят до по-бърза възвращаемост и значително по-висока печалба. В песимистичния сценарий обаче, намалението на цената на електроенергията и намалението на капацитета удължават периода на възвращаемост и намаляват общата печалба.

Финансовият модел показва, че периодът на възвращаемост на инвестицията е между 6 и 7 години. На лице е умерена вариация във възвръщаемостта – времето за възвръщане на инвестицията не варира толкова драматично между сценариите. Разликата между най-благоприятния и най-неблагоприятния сценарий е около 1 година и 1 месец. Рискът за възвръщаемостта също е по-умерен, времето за възвръщане остава в по-предвидими граници. Това означава, че независимо от непредвидени неблагоприятни условия, инвестицията вероятно ще бъде възвърната в рамките на 6 години или независимо от промените в пазарните условия, инвестицията ще се възвърне в разумен период.

Въпреки добрите резултати високата дисперсия подсказва, че трябва да се планират непредвидени разходи или доходи, за да се смекчат евентуални отрицателни ефекти върху проекта. Също така да се обмисли как да се намали несигурността – чрез сключване на дългосрочни договори за покупка на електроенергия, управление на оперативни разходи, и постоянен мониторинг на производителността на системата.

Финансовото моделиране на фотоволтаичния проект в гр. Силистра показва потенциал за добра възвръщаемост, но също така разкрива значителни рискове и вариации в крайния финансов резултат. Външни фактори като колебания в цената на електроенергията и оперативните разходи могат да окажат съществено влияние върху успеха на проекта. По-умерената дисперсия на периода на възвръщане показва, че времето за възвръщане на инвестицията е относително предвидимо. Като цяло проектът има потенциал за успех, особено при добре планирана стратегия за управление на оперативните разходи и дългосрочни договори за продажба на

електроенергия. Важна е подготовката за различни сценарии и управляване на риска чрез внимателно планиране и мониторинг.

Заклучение

Изследването на риска в различни области на дейност ни дава възможност да разберем неговата същност и влияние върху процеса на вземане на решения.

Рискът е неразривна част от всяко начинание, а правилната му оценка и управление са ключови за успеха. То не само че позволява идентифициране и оценка на потенциалните заплахи, но също така осигурява стратегически подход за минимизиране на негативните последствия и максимизиране на възможностите. Ефективното управление на риска не само може да защити организацията от загуби, но и да отвори нови възможности за растеж и развитие.

Успешните стратегии за управление на риска изискват междудисциплинарен подход и ангажираност от всички заинтересовани страни.

Следователно, познанието и разбирането на риска са необходими условия за постигане на устойчивост и конкурентоспособност в съвременния свят.

В заключение, управлението на риска е динамичен и многопластов процес, който изисква постоянно адаптиране и подобряване. Само чрез задълбочено разбиране и активно управление на рисковете можем да изградим устойчиви и успешни организации, способни да се справят с предизвикателствата на съвременния свят.

Представените в този доклад данни и анализи са актуални към 30 септември 2024г. и отразяват наличната информация към този момент. С оглед на възможни промени в икономическите и техническите условия, данните могат да претърпят актуализация в бъдеще.

ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Atanasov, B., Nikolaev, R., Miryanov, R., Petkov, Y., Yordanova, V. (2014) *Matematika i optimizatsionni metodi*. Varna, Izd. „Nauka i ikonomika“.
2. Dochev, D., Nikolaev, R. (2007) *Teoria na riska*. Varna, Nauka i ikonomika.
3. Georgiev, Iv., Tsvetkov, Tsv. (1997) *Menidzhmant na firmenite inovatsii i investitsii*, Sofia, UI „Stopanstvo“.
4. Miryanov, R., Petkov, Y., Yordanova, V. (2015) *Matematika i optimizatsionni metodi*. Varna, Izd. „Nauka i ikonomika“.
5. Nikolov, N. (1994) *Finansovi izchislenia*. Varna, Princeps, 1994.
6. Nikolaev, R., Milkova, T. (2023) *Osobenosti pri izbora na metod za otsenka na investitsii*. *Sbornik dokladi kragla masa*, „Industrialniyat biznes – perspektivi i vazmozhnosti“, Ikonomicheski universitet – Varna, 27.10.2023g. <https://ibex.bg/>, 30.09.2024г.
7. <https://www.emde-solar.com/toplinna-karta>, 30.09.2024г.
8. <https://bds-bg.org/bg/project/show/bds:proj:121117>, 30.09.2024г.

**ФУНДАМЕНТАЛНАТА ПОДГОТОВКА
ВЪВ ВИСШЕТО ОБРАЗОВАНИЕ**

Сборник с доклади
от международна научно-практическа конференция

**THE ROLE OF FUNDAMENTAL PROGRAMS
IN HIGHER EDUCATION**

Conference proceeding

Издателство „Наука и икономика“
Икономически университет – Варна
ул. „Евлоги Георгиев“ 24
Печатна база на ИУ – Варна

ISSN 2815-3863



КАТЕДРА „СТАТИСТИКА И
ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА“